LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE : QUEL FONDEMENT ?

PAUL ÉGRÉ

RÉSUMÉ. Quel est le fondement du raisonnement par récurrence, ou principe d'induction mathématique ? J'examine trois réponses à la question. Une réponse formaliste : la question est un faux problème, l'induction est un axiome parmi d'autres. Une réponse de type intuitionniste, celle de Poincaré : le fondement de l'induction est un acte de l'esprit, qui condense une infinité d'inférences logiques. Enfin la réponse logiciste de Frege : l'induction suit d'une définition explicite de la notion de nombre entier naturel. Le but de cet article est de comparer ces positions et de rendre accessible le Théorème de Frege, qui donne une preuve des axiomes de Peano en logique du second ordre et dérive ainsi le principe d'induction comme un théorème.

1. Le principe de récurrence

L'objet de cet article est de réfléchir au fondement du principe de *récurrence* arithmétique, encore appelé principe d'*induction* mathématique. Sans doute la formulation la plus commune en est-elle celle de l'axiome dit de *récurrence faible*, qui énonce que si une propriété arithmétique vaut de zéro, et si elle vaut du successeur d'un entier quelconque dès lors qu'elle vaut de cet entier, alors cette propriété vaut de tout entier. Dans le langage de la logique des prédicats, cet axiome s'exprime à l'aide du schéma suivant :

(1) $$[P(0) \wedge \forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))] \rightarrow \forall n P(n).$$

Il est plus courant, de fait, de parler de *raisonnement par récurrence*, car en pratique on se sert du principe comme d'une *règle d'inférence*, plutôt que comme d'un *énoncé axiomatique* : on démontre que P vaut de 0, puis on démontre que P vaut de $n+1$ sous l'hypothèse que P vaut de n, et on en infère que P vaut de tout n. Dans ce qui suit, j'entendrai par principe de récurrence avant tout l'axiome, mais en ayant en tête que la règle d'inférence est dérivable de l'axiome (et réciproquement, moyennant le théorème de la déduction)[1].

[Version pénultième. A paraître dans *la Gazette des Mathématiciens*, merci de citer la version parue]. *Cet article est dédié à Jacques Dubucs, en témoignage reconnaissant du cours de philosophie des mathématiques qu'il dispensait en Sorbonne en 1994-1995, et des riches années de formation passées sous sa direction.* Je remercie très vivement Damien Gayet et Maxime Bourrigan de leur relectures critiques et de leurs commentaires détaillés, et Damien Gayet de son invitation à écrire un article pour la *Gazette*. Merci également à Denis Bonnay et Mark van Atten pour plusieurs échanges et suggestions fort utiles en amont et au cours de ce travail, et aux élèves de mon cours à l'ENS en 2015 sur les *Fondements de l'arithmétique* de Frege.

1. Le théorème de la déduction énonce l'équivalence entre la dérivabilité d'un énoncé A à partir d'hypothèses $B_1, ..., B_n$ et la dérivabilité de l'énoncé conditionnel correspondant $(B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \rightarrow A)$.

Le principe de récurrence est un outil de preuve central en arithmétique. À l'aide du principe de récurrence, on peut démontrer une multitude de théorèmes combinatoires. Par exemple, on peut montrer par récurrence sur n que la somme des n premiers entiers est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. Certes, cet exemple n'est sans doute pas le meilleur, car on peut donner du même résultat d'autres preuves plus algébriques qui ne font pas intervenir le principe de récurrence (voir par exemple la preuve attribuée au jeune Gauss, qui consiste à réécrire les termes de la suite à l'envers, à sommer terme à terme, puis à diviser par deux). Néanmoins, il existe bien des cas pour lesquels aucune autre voie d'accès obvie à une généralisation sur les entiers ne semble disponible que celle du principe de récurrence. Plus fondamentalement, la validité du principe de récurrence ne devrait pas dépendre de son utilité.

La question qui nous intéresse ici est de savoir quelle justification donner du principe de récurrence arithmétique. S'agit-il d'un axiome primitif, dont la validité ne découle d'aucun principe plus fondamental, ou peut-on espérer dériver le principe de récurrence d'autres principes plus simples ? Dans un premier temps, j'écarterai deux réponses naïves qui sont susceptibles de venir à l'esprit du mathématicien, basées l'une et l'autre sur la pratique des mathématiques. Dans un deuxième temps, je propose de considérer trois réponses de nature philosophique au problème du fondement de l'induction mathématique, que j'appellerai ≪ formaliste ≫, ≪ intuitionniste ≫, et enfin ≪ logiciste ≫. Ces réponses ont été proposées à peu près au même moment par trois mathématiciens éminents, à la fin du dix-neuvième siècle, à savoir par Hilbert, par Poincaré, et par Frege. C'est à la réponse logiciste de Frege – la première, en réalité, dans l'ordre chronologique – que je consacrerai l'examen le plus attentif, après seulement avoir rappelé les conceptions de Hilbert et de Poincaré. Ma motivation pour procéder ainsi est que la conception logiciste des mathématiques reste souvent mal distinguée, notamment en France, de la conception formaliste. Une seconde raison tient à l'actualité de Frege en philosophie contemporaine des mathématiques. Depuis une trentaine d'années, sous l'impulsion de plusieurs philosophes des mathématiques, en particulier C. Wright, G. Boolos, et R. Heck Jr., le programme fregéen de fondement de l'arithmétique a été considérablement réévalué, et la conception fregéenne des nombres naturels, encore méconnue des mathématiciens, constitue désormais un point de référence incontournable[2]. L'ambition de cet article sera notamment de donner les étapes de la dérivation fregéenne du principe de récurrence, et d'en discuter la portée philosophique.

2. Deux réponses naïves

D'aucuns diraient que le principe d'induction arithmétique est un principe évident et immédiat, dont la vérité se manifeste clairement à l'imagination. Le terme même d'induction relève d'une métaphore physique : imaginons les entiers organisés comme des dominos disposés debout côte-à-côte, et comparons la propriété P a une force, qui, appliquée au premier d'entre eux, se propage au suivant (voir par exemple [Bostock, 1997], qui emploie la comparaison à des fins pédagogiques ; voir également [Russell, 1919] qui imagine des wagons). Il semble que la force doive s'étendre à tout le système, de proche en proche

2. Cf. en particulier [Wright, 1983], [Boolos, 1998b], [Heck Jr., 2006] et [Heck Jr., 2012].

(l'ensemble des dominos devrait basculer, ou l'ensemble des wagons se mettre en mouvement). Mais comparaison n'est pas raison, et on attend de la justification d'un principe aussi central que le principe d'induction qu'elle nous éclaire davantage. En particulier, il ne va pas de soi que ce mode de justification s'applique à d'autres versions du principe, pourtant logiquement équivalentes, comme celles que nous examinerons ci-après.

Une seconde manière plus intrinsèque de justifier le principe serait justement d'espérer le dériver de formulations distinctes. L'une d'entre elles est l'axiome dit de *récurrence forte*, qui énonce que si une propriété vaut d'un entier chaque fois qu'elle vaut de tous ses prédécesseurs, alors cette propriété vaut de tout entier :

$$(2) \qquad \forall n(\forall m(m < n \to P(m)) \to P(n)) \to \forall n P(n).$$

L'équivalence entre les deux formes du principe de récurrence est facilement démontrable. En arithmétique, et moyennant les propriétés usuelles qui relient 0, la notion de successeur, et la relation $<$, la récurrence forte et la récurrence faible sont en outre équivalentes à un autre principe, le principe du *plus petit nombre* (également appelé du *bon ordre*), qu'on énonce généralement en disant que tout ensemble d'entiers non vide admet un plus petit élément [3]. Traduit en logique des prédicats, ce principe signifie que si une propriété arithmétique vaut d'au moins un entier, alors il existe un entier qui satisfait la propriété, tel que tout entier plus petit manque de la satisfaire :

$$(3) \qquad \exists n P(n) \to \exists n(P(n) \land \forall m(m < n \to \neg P(m))).$$

Certains mathématiciens verraient peut-être dans le principe du plus petit nombre, ou dans le principe de récurrence forte, des principes plus fondamentaux que le principe de récurrence faible. Mais ici encore, ce qui est susceptible d'amener tel ou tel à cette position tient vraisemblablement à des considérations d'ordre pratique : le principe du plus petit nombre est parfois plus facile à utiliser, ou le principe de récurrence forte rend la preuve souvent plus directe que si l'on doit se limiter à n'utiliser que la version dite faible du principe.

Si on laisse de côté ces considérations pratiques, l'équivalence logique entre les trois versions du principe constitue cependant une objection de taille à l'idée de fonder telle version du principe sur telle autre : la justification est alors menacée de circularité. Poincaré est probablement le premier à formuler cette critique, lorsqu'il écrit ([Poincaré, 1894]) [4] :

> ≪ le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence peut être mis sous d'autres formes ; on peut dire par exemple que dans une collection infinie de nombres entiers différents, il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres. On pourra passer facilement d'un énoncé à l'autre et se donner l'illusion qu'on a démontré la légitimité du raisonnement par

3. Pour montrer l'équivalence, il suffit de supposer que : i) 0 n'est le successeur d'aucun nombre ii) tout nombre est inférieur à son successeur iii) tout nombre est identique à 0 ou est le successeur d'un autre iv) si n est inférieur au successeur de m, alors n est inférieur ou égal à m.

4. [Boolos, 1984] formule une critique similaire, qu'il généralise à d'autres tentatives, y compris celle de Frege.

> récurrence. Mais on sera toujours arrêté, on arrivera toujours à un axiome indémontrable qui ne sera au fond que la proposition à démontrer traduite dans un autre langage ≫.

On pourrait répondre qu'il est erroné de raisonner à équivalence logique près, et soutenir que les considérations pratiques doivent être prises en compte lorsqu'il s'agit de rendre compte du choix d'un axiome. Mais le problème est que même si l'on proposait que le principe du plus petit nombre, admettons, fût le fondement du principe de récurrence dans sa version faible ou dans sa version forte, la question demeurerait la même de savoir si l'on peut trouver pour le principe du plus petit nombre une dérivation à partir de principes logiquement plus simples. Nous n'avons pas trouvé, à ce stade de notre questionnement, de réponse satisfaisante à cette question.

De ces considérations je conclus que ni l'idée de fonder le principe de récurrence sur une intuition de nature physicaliste, ni celle de fonder le principe de récurrence sur telle ou telle de ses versions, ne sauraient donner une réponse satisfaisante à la question de la justification du principe.

3. La vision formaliste

Considérons à présent deux autres stratégies antagonistes concernant la justification du principe de récurrence. La première, envisagée dans cette section, est une stratégie que je qualifierais de ≪ formaliste ≫, dans la lignée de la conception hilbertienne des axiomes mathématiques. Cette stratégie est fondamentalement déflationniste. Elle revient à considérer le principe de récurrence comme un axiome parmi d'autres, ne requérant aucune justification particulière. Considérons les axiomes dits de Peano pour l'arithmétique [5]. Ces axiomes sont au nombre de cinq, et le dernier d'entre eux est justement l'axiome d'induction.

(4) **Les axiomes de Peano :**

1. 0 est un nombre.
2. Tout nombre admet un successeur.
3. Deux nombres distincts ont des successeurs distincts, et deux nombres identiques ont le même successeur.
4. 0 n'est le successeur d'aucun nombre.
5. Pour toute propriété, si 0 a cette propriété, et si le successeur de tout nombre ayant cette propriété a cette propriété, alors tout nombre a cette propriété.

---

5. Voir [Peano, 1889]. Les propriétés sont également appelés axiomes de Dedekind-Peano, en raison du fait que Dedekind identifie déjà ces propriétés dans [Dedekind, 1888]. Toutefois, seul Peano les présente comme des axiomes à proprement parler, à savoir comme des premiers principes indémontrables. Dedekind, comme Frege, entreprend lui aussi de dériver ces postulats d'une théorie plus générale des ensembles et de la nature des nombres. En cela, l'approche de Peano peut être qualifiée de formaliste, et celle de Dedekind de logiciste (voir [Hilbert, 1926], qui met Frege et Dedekind dans le même camp). Pour des raisons de place, je laisse ici de côté un examen de la théorie de Dedekind, mais le lecteur doit garder en tête que Frege et Dedekind poursuivent des buts voisins.

Dans une perspective formaliste, le rôle de ces axiomes est de fournir une *définition implicite* de la notion de nombre. Cela signifie que sera considéré comme nombre tout élément pertinent de tout système d'objets qui *réalise* ce système d'axiomes. Comme l'explique Hilbert à Frege dans une lettre devenue célèbre ([Hilbert, 1899]), pour qui voit les axiomes comme épistémologiquement premiers, il est mal fondé de chercher à identifier des notions telles que « nombre », « zéro » ou « successeur » *en amont* ou indépendamment de l'énoncé de ce système d'axiomes [6]. Pour Hilbert, la non-contradiction des axiomes d'un système donné est le critère de leur vérité, et non l'inverse. Il serait vain, par conséquent, d'espérer fonder la vérité de tel ou tel axiome au-delà de ce réquisit de cohérence. Dans la conférence prononcée par Hilbert en 1925 « Sur l'Infini », Hilbert présente d'ailleurs l'axiome d'induction sans justification particulière. Dans cette même conférence, il suggère de façon plus générale que le choix de tel ou tel axiome, notamment en géométrie, est en partie une affaire de convention. Comment espérer justifier le postulat des parallèles d'Euclide, par exemple, s'il s'avère qu'une géométrie sans ce postulat elle aussi est cohérente ?

De la même manière, considérons le principe du moindre nombre : nous savons que ce principe n'est pas vérifié dans toute structure mathématique. L'ensemble des nombres rationnels ne satisfait pas le principe du moindre nombre, par exemple, et l'ensemble des nombres rationnels est tout simplement une structure mathématique autre que celle des nombres entiers. Une autre façon de se représenter la position formaliste revient à concevoir le principe de récurrence comme une règle conventionnelle, semblable à celle qui concerne le déplacement de telle ou telle pièce dans un jeu. Nous savons que si nous autorisions le fou, aux échecs, à se déplacer comme une dame, alors le jeu changerait de nature *ipso facto*. Mais du moment que la modification n'aboutit pas à une contradiction, alors le choix de ce nouveau système de règles est légitime.

La position formaliste est séduisante à première vue, car elle semble reléguer le problème de la justification du principe de récurrence au statut de pseudo-problème. On peut toutefois formuler deux objections à son encontre. L'une concerne le programme de Hilbert. Hilbert espérait fonder les mathématiques en montrant que l'ensemble des mathématiques pouvait être vu comme une *extension conservative* de l'arithmétique élémentaire, dans laquelle il incluait l'axiome d'induction [7]. Cela signifie que Hilbert accordait néanmoins à l'axiome d'induction un statut épistémologique séparé parmi la multitude des axiomes mathématiques. Mais cette justification du principe d'induction fait défaut [8]. Une seconde

6. Hilbert dans sa lettre prend l'exemple des axiomes de la géométrie relativement aux notions de « point » et « droite », mais ses propos s'appliquent de façon identique au cas de l'arithmétique.

7. Une théorie T' est une extension conservative de T si T' contient T et l'étend à l'aide de plus de ressources expressives ou d'axiomes, mais est telle que tout théorème du langage de T qui est dérivable dans T' est déjà dérivable dans T. Si les mathématiques étaient incohérentes, mais constituaient une extension élémentaire de l'arithmétique élémentaire, on pourrait donc établir cette incohérence dans l'arithmétique élémentaire. Pour plus de détails sur ces notions et sur le programme de Hilbert, je renvoie à la présentation qu'en donne Dubucs dans [Blanché and Dubucs, 1996].

8. Voir en particulier [Hilbert, 1927], qui répond brièvement aux critiques formulées par [Poincaré, 1906] sur l'usage subreptice que Hilbert ferait de l'induction pour prouver la cohérence de l'arithmétique. Hilbert suggère que Poincaré aurait manqué de distinguer le principe de récurrence et les définitions par récurrence, mais ne donne pas pour autant de justification du principe lui-même. Hilbert considère par ailleurs dans

objection qu'on peut formuler à l'encontre du formalisme concerne ce que j'appellerais le statut cognitif privilégié de l'arithmétique au sein des mathématiques. Dans cette perspective, qui est en réalité celle de Frege et sur laquelle nous reviendrons par la suite, les nombres entiers ne sont pas essentiellement la réalisation de tel ou tel système d'axiomes. Les nombres entiers nous servent à compter les objets, et il est sensé de se demander comment fonder le principe de récurrence à partir d'une définition plus abstraite de la notion de nombre qui remplit cette fonction, plutôt que d'y voir une règle arbitraire [9].

4. L'intuitionnisme de Poincaré

À l'opposé de la conception formaliste se situe ce que j'appellerai la vision intuitionniste du principe de récurrence. Le terme d'intuitionnisme est dû au mathématicien hollandais Brouwer, qui se réclamait lui-même de Kant et de sa théorie du fondement des mathématiques dans l'intuition *a priori* du temps et de l'espace. Je ne chercherai pas ici à rendre compte de la vision brouwerienne du principe de récurrence (je renvoie pour cela à l'article de [van Atten, 2015]), mais je m'appuierai sur la conception antérieure et plus connue qu'en donne Poincaré, vision par laquelle Poincaré se réclame du kantisme, et qui apparente Poincaré dans une certaine mesure au courant intuitionniste que développeront Brouwer et ses disciples quelques années plus tard.

Poincaré en 1894 se demande si le principe de récurrence pourrait être réduit à des principes logiques plus simples. Il conclut, négativement, que le raisonnement par récurrence n'est pas réductible à un principe logique, mais qu'il constitue ≪ le véritable type du jugement synthétique *a priori* ≫. Ces notions sont empruntées à Kant. Rappelons d'abord que pour Kant, un énoncé est *analytique*, en un premier sens du terme que retient Kant, si sa vérité se déduit logiquement du principe de non-contradiction. Il est *synthétique*, inversement, si sa vérité ne dépend pas du seul principe de non-contradiction. Par ailleurs, un jugement est *a priori* pour Kant s'il ne dépend pas de l'expérience, mais qu'il structure l'expérience ; dans le cas contraire, il sera dit *a posteriori*. De façon célèbre, Kant considère tous les jugements arithmétiques comme *a priori*, car indépendants de l'expérience. Cependant, Kant subdivise les énoncés arithmétiques en deux classes : il considère les égalités arithmétiques simples, comme $2 = 2$, comme des jugements analytiques, mais il voit les

sa définition de l'arithmétique élémentaire des versions restreintes du principe d'induction à cette époque, c'est-à-dire des versions dans lesquelles la complexité des formules quantifiées est limitée.

9. Une troisième objection, plus générale que les précédentes, consiste à nier que, parce qu'un axiome donné est indépendant d'autres axiomes, la question de sa justification devient caduque. On sait depuis les travaux de P. Cohen que l'hypothèse du continu est indépendante des axiomes de la théorie des ensembles ZFC. Néanmoins, pour de nombreux mathématiciens la question demeure légitime de chercher à décider l'hypothèse du continu à partir de considérations fondamentales sur la nature des ensembles. Sur cette question du choix des axiomes en mathématiques, voir notamment [Gödel, 1947], [Feferman, 1999], ou encore [Dehornoy, 2002].

égalités arithmétiques plus complexes, comme $7 + 5 = 12$, comme exprimant des jugements synthétiques [10]. Pour Kant, les énoncés mathématiques non-tautologiques sont donc fondamentalement de nature synthétique *a priori*.

Le choix fait par Poincaré de qualifier de synthétique *a priori* le raisonnement par récurrence n'est pas un simple emprunt rhétorique à Kant, mais s'appuie sur deux arguments précis. Poincaré donne en premier lieu un argument en faveur du caractère synthétique — entendez donc *extra-logique* — du principe de récurrence. À première vue, le raisonnement par récurrence s'obtient sur la base de deux principes logiques, à savoir le *modus ponens* (MP) (que Poincaré appelle « le syllogisme hypothétique ») et la règle d'instantiation universelle (IU), à savoir :

(MP) De A et de $A \to B$, on infère logiquement B.

(IU) De $\forall x P(x)$, on infère logiquement $P(k)$ pour tout élément k du domaine de quantification.

Ces deux règles d'inférence sont logiques au sens où, si l'on niait la conclusion tout en admettant les hypothèses, on aboutirait à une contradiction. En utilisant ces deux règles, il semble que l'on puisse dériver $P(k)$ pour n'importe quel entier k, comme le suggère l'arbre de preuve suivant, dans lequel on part de l'hypothèse $P(0)$ (hypothèse à gauche), et où on réinstancie autant de fois k l'hypothèse de récurrence $\forall n(P(n) \to P(n+1))$ (hypothèse de droite) avant d'appliquer le *modus ponens*, pour obtenir $P(k)$ (une fois pour obtenir $P(1)$, deux fois pour $P(2)$, et ainsi de suite) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(0) \qquad \dfrac{\forall n(P(n) \to P(n+1))}{P(0) \to P(1)}\,(\mathrm{IU})}{P(1)}\,(\mathrm{MP}) \qquad \dfrac{\forall n(P(n) \to P(n+1))}{P(1) \to P(2)}\,(\mathrm{IU})}{P(2)}\,(\mathrm{MP}) \qquad \dfrac{\forall n(P(n) \to P(n+1))}{P(2) \to P(3)}\,(\mathrm{IU})}{\vdots}\,(\mathrm{MP})$$

Une tentative pour transformer cette esquisse de preuve en preuve serait de raisonner par l'absurde : « supposons pour aboutir à une contradiction qu'il existe un n tel que $\neg P(n)$. Posons $n = k$. *Par k applications de la règle (IU) et k applications de la règle (MP), on peut inférer que* $P(k)$. Or par hypothèse, $\neg P(k)$. Contradiction. »

10. Pour le comprendre, il faut savoir que Kant appelle aussi analytique un énoncé de la forme sujet-prédicat tel que le prédicat soit analytiquement contenu dans le sujet, et synthétique un énoncé de la même forme tel que le prédicat ne soit pas contenu dans le sujet. Kant considérait qu'un énoncé comme $2 = 2$ était analytique aux deux sens du terme qu'il énonce, mais voyait un énoncé comme $7 + 5 = 12$ comme synthétique, en dépit du fait que sa négation viole le principe de contradiction, parce que, dans ce cas précis, il voyait le concept de 12 comme n'étant pas inclus analytiquement dans les concepts de 7 et de 5. Frege est parmi les premiers à avoir mis à jour et contesté la tension entre les deux définitions kantiennes des termes « analytique » et « synthétique » ([Frege, 1884]). L'une des incohérences de la définition kantienne provient notamment de l'hypothèse implicite que fait Kant que les jugements d'égalité arithmétique sont de la forme sujet-prédicat, ce que conteste Frege en inventant la logique des prédicats relationnels ([Frege, 1879]).

Toute la difficulté de ce raisonnement, cependant, concerne la justification du lemme que nous avons marqué en italique (ou, dans l'arbre de preuve, la justification des points de suspension). Comment établir avec certitude que par k applications de la règle (IU) et autant d'applications de (MP), on peut dériver $P(k)$ de $P(0)$? Pour le démontrer, il semble que nous devions à nouveau raisonner par induction, et supposer par là le principe même que nous voulons démontrer ! Poincaré en conclut que si on nous donne un entier fini spécifique k, on pourra certes prouver $P(k)$ à partir de $P(0)$ à l'aide de principe purement logiques, mais il ajoute :

> ≪ quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler ≫.

Ici s'achève le premier argument de Poincaré, en faveur du caractère synthétique du principe de récurrence. L'argument en faveur du caractère *a priori* du principe est beaucoup plus concis. Poincaré fait remarquer que si le principe était *a posteriori* — entendez : s'il était issu de l'expérience — sa validité dépendrait d'une généralisation faite à partir d'un nombre fini de cas. Autrement dit, elle correspondrait au même genre de généralisation inductive — cette fois au sens de l'induction empirique — qui nous conduit de l'observation qu'un échantillon de corbeaux sont noirs à la généralisation que ≪ tous les corbeaux sont noirs ≫. Mais la confiance que nous plaçons dans le principe de récurrence est beaucoup plus élevée que celle que nous plaçons dans une généralisation fondée sur l'expérience.

En résumé, le principe de récurrence est pour Poincaré un principe qui n'est ni démontrable à partir de principes logiques plus élémentaires, ni fondé sur l'expérience. Poincaré en conclut que le raisonnement par récurrence :

> ≪ n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible ≫.

Cette citation illustre clairement le caractère intuitionniste de la conception de Poincaré, puisque le fondement proposé pour le principe se situe dans une intuition de l'esprit sur ses propres actes. La conception poincaréienne, incidemment, est plus explicative que celle que j'ai qualifiée de ≪ formaliste ≫, car elle rapproche le principe de récurrence arithmétique de principes logiques distincts, tout en soulignant l'écart qui les sépare.

5. Le logicisme de Frege

On pourrait penser que les réponses formaliste et intuitionniste qui précèdent nous laissent en proie à un dilemme, mais on omettrait de voir que ces deux conceptions n'épuisent pas l'espace des justifications possibles des axiomes mathématiques, et en particulier des axiomes de l'arithmétique. Une manière de s'en rendre compte est de nous tourner vers la conception logiciste de l'arithmétique défendue par G. Frege dans ses deux ouvrages : *Les fondements de l'arithmétique* [Frege, 1884], et *Les lois fondamentales de l'arithmétique* [Frege, 1894].

Avant Poincaré, Frege entend montrer, notamment contre l'empirisme de Stuart Mill, que le fondement de l'arithmétique ne saurait être dans l'expérience physique courante. Mais à la différence de Poincaré, Frege a l'ambition ouvertement anti-kantienne de montrer que les axiomes et théorèmes de l'arithmétique sont réductibles à des vérités logiques. Le terme de ≪ vérité logique ≫ est toutefois à prendre avec précaution. Frege n'entend pas par là que l'ensemble des axiomes et théorèmes de l'arithmétiques seraient réductibles au seul principe de non-contradiction. Il entend plutôt montrer que les axiomes et théorèmes de l'arithmétique s'obtiennent à l'aide de principes purement logiques à partir d'une définition adéquate de la notion de nombre, définition qui s'énonce elle-même dans le langage de la logique.

Afin de mieux cerner la conception logiciste de Frege, commençons par expliquer en quoi elle diffère d'une approche formaliste. La différence principale tient justement dans la conception des axiomes. Pour Frege, les axiomes de Peano – que naturellement Frege n'appelle pas ainsi, mais qu'il reconnaît comme des propriétés fondamentales des entiers – ne sauraient constituer une définition satisfaisante de la notion de nombre, fût-ce même une définition implicite. En particulier, un système axiomatique, aussi contraint soit-il, ne pourra jamais distinguer deux objets isomorphes : dans le cas des axiomes de Peano, une approche axiomatique est en ce sens compatible avec des interprétations distinctes des termes primitifs de la théorie, quand même les interprétations considérées sont toutes isomorphes. "Zéro", par exemple, pourrait de façon compatible avec les axiomes désigner le point origine d'une demi-droite infinie, et le successeur de zéro, un point situé à un centimètre de l'origine sur cette droite, et ainsi de suite (voir [Hempel, 1945], §7). Mais les objets de ce modèle, intuitivement, ne *constituent* pas les nombres à proprement parler, ceux au moyen desquels nous comptons les objets qui tombent sous divers concepts. Or Frege voit les nombres comme des entités objectives et singulières, indépendantes de l'esprit, et qu'il convient donc de caractériser en propre. À rebours de la vision formaliste qu'énoncera Hilbert, Frege propose par conséquent de *dériver* les postulats de Peano d'une *définition explicite* de la notion de nombre, énoncée dans un langage logique. Pour Frege, la vérité des axiomes mathématiques précède en ce sens leur cohérence, ce qui distingue fondamentalement la conception frégéenne de celle de Hilbert.

6. La construction fregéenne des nombres naturels

Dans ce qui suit je présente les principales étapes de la construction par Frege des entiers naturels. La preuve du principe de récurrence est présentée en annexe de cet article, à partir de l'excellente présentation de [Heck Jr., 2012]. Il me semble important de la rendre accessible ici, parce que la plupart des exposés classiques du théorème de Frege (cf. [Russell, 1919], [Hempel, 1945], ou même [Burgess, 2005]) manquent de le faire.

6.1. **Le principe de Hume.** Pour comprendre la définition fregéenne des nombres naturels, il faut d'abord comprendre la conception que Frege se fait de la notion de nombre en général. Frege a du nombre une conception cardinale : la fonction des nombres est de nous permettre de compter les objets. Frege retient en particulier pour la définition du nombre un principe qu'il attribue à Hume, qui capture pour Frege une partie de l'essence même des nombres, et qu'il partage avec d'autres de ses contemporains qu'il cite, notamment E. Schröder, E. Kossak et G.Cantor (cf. [Frege, 1884], §63). Le ≪ principe de Hume ≫ énonce que deux ensembles ont le même nombre d'éléments si et seulement s'il existe une correspondance biunivoque entre eux (si, à chaque élément de l'un, correspond un unique élément de l'autre, et réciproquement) [11]. Frege ne parle pas d'ensembles, mais de concepts. Dans les termes de Frege, on dira que le nombre du concept F est identique au nombre du concept G si et seulement si il existe une correspondance biunivoque entre F et G. Notons que cette définition du nombre est très générale, en cela qu'elle subsume, comme chez Cantor, aussi bien la notion de cardinal fini que celle de cardinal infini.

Un aspect essentiel de cette définition est qu'elle peut se formaliser entièrement dans le langage de la logique du second ordre que développe Frege à la même époque (voir [Frege, 1879]), c'est-à-dire dans cette partie de la logique qui autorise à quantifier non seulement sur des individus mais aussi des propriétés et relations. Pour formaliser le principe de Hume, il suffit de dire que le nombre d'un concept est identique au nombre de l'autre s'il existe une relation fonctionnelle et injective du premier vers le second, qui soit également surjective (cf. [Heck Jr., 2012] ; $\#F$ se lit ≪ le nombre du concept F ≫, ou encore ≪ le nombre de F ≫) :

$$\text{(Principe de Hume)} \quad \#F = \#G \text{ ssi, par définition}$$
$$\exists R\ [\forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Rxz \rightarrow y = z) \wedge \forall x \forall y \forall z (Rxz \wedge Ryz \rightarrow x = y)$$
$$\wedge \forall x (Fx \rightarrow \exists y (Gy \wedge Rxy)) \wedge \forall y (Gy \rightarrow \exists x (Fx \wedge Rxy))]$$

6.2. **Zéro, le successeur immédiat.** La seconde étape de la construction de Frege concerne cette fois la définition des nombres naturels (ou cardinaux finis). Frege se sert du principe de Hume pour définir le nombre zéro, puis pour définir la relation de successeur immédiat entre deux nombres. Les définitions sont relativement aisées. Zéro est défini comme le nombre du concept ≪ non identique à soi-même ≫, que nous noterons $\lambda x.x \neq x$. [12] Comme toute chose est supposée, logiquement, être identique à soi-même, aucun élément ne tombe sous le concept ≪ non identique à soi-même ≫, et on peut vérifier que deux concepts ont le nombre zéro dès lors qu'ils ne contiennent aucun élément. On peut donc écrire :

$$\text{(Zéro)} \qquad 0 := \#(\lambda x.x \neq x).$$

Il définit ensuite la relation de successeur immédiat entre n et m en disant que m a pour successeur immédiat n si n est le nombre d'un concept F non vide tel que m soit le nombre du concept ≪ être un F différent d'un F donné ≫ :

$$\text{(Successeur)} \quad S(m, n) :\equiv \exists F \exists x (Fx \wedge n = \#F \wedge m = \#(\lambda y.Fy \wedge y \neq x)).$$

11. L'expression ≪ principe de Hume ≫ est due à G. Boolos. Elle fait désormais autorité.

12. La notation lambda est postérieure à Frege, et issue du lambda-calcul d'Alonzo Church. C'est une notation fonctionnelle. L'expression $\lambda x.x \neq x$ peut se lire comme : ≪ la fonction qui pour chaque x renvoie la valeur de vérité de l'énoncé $x \neq x$ ≫. C'est, vue autrement, la fonction caractéristique de l'ensemble vide.

Intuitivement, le nombre d'un concept est le successeur du nombre d'un autre si le second contient un élément de moins que le premier.

6.3. **La relation ancestrale.** Étant donnés le zéro et la relation de successeur immédiat, il manque un dernier élément à Frege pour définir la notion de nombre naturel. L'idée directrice de Frege est simple : elle consiste à définir un nombre naturel comme tout nombre qui est soit égal à zéro, soit qui est un successeur de zéro, *immédiat ou non immédiat*. La démarche de Frege consiste à définir la relation de ≪ successeur immédiat ou non immédiat ≫, à partir de la relation de successeur immédiat.

On dira qu'un nombre n est dans la relation de successeur, immédiat ou pas, à un nombre m donné, si et seulement si n appartient à la *clôture transitive* de la relation de successeur immédiat à partir de m. La notion de clôture transitive est facile à illustrer sur un exemple : soit trois éléments, 1, 2, et 3. On sait que 2 est le successeur immédiat de 1, et 3 le successeur immédiat de 2. Mais 3 n'est pas le successeur immédiat de 1. La relation de ≪ successeur immédiat ≫ manque par conséquent d'être transitive. Mais on peut définir sa clôture transitive comme étant la plus petite relation qui étend la relation de successeur immédiat en une relation transitive. En suivant cette définition, on voit que 1 devient le successeur (médiat) de 3, 2 reste celui de 1, et 3 celui de 2.

La clôture transitive d'une relation est également connue sous le nom de *relation ancestrale* (cf. [Russell, 1919]). Étant donnée une relation binaire R, représentant le fait pour x d'être un parent direct de y (père ou mère), on peut en effet définir en termes ensemblistes le fait pour b d'être un ancêtre de a, en disant que b appartient au plus petit ensemble qui contient tout parent de a et qui est clos par la relation de parenté directe. Cette définition est énoncée par Frege en logique du second ordre : étant donnée une relation R, où $R(x, y)$ signifie que y est un parent direct de x, Frege définit la relation ancestrale R^* (ou clôture transitive) entre deux éléments a et b comme suit :

(La relation ancestrale)
$R^*(a, b) :\equiv \forall X \forall x \forall y(((R(a, x) \to X(x)) \wedge (X(x) \wedge R(x, y) \to X(y))) \to X(b))$.

Pour qui n'est pas habitué à la logique du second ordre, il est conseillé de lire $X(x)$ comme équivalent à l'écriture $x \in X$ qu'on aurait en théorie des ensembles. La formule ci-dessus dit par conséquent qu'un couple (a, b) appartient à la clôture transitive de la relation R si b appartient à l'intersection de tous les ensembles qui contiennent tous les parents de a et qui contiennent tous les parents de tous les éléments qu'ils contiennent. Un point important à remarquer dans cette définition de la relation ancestrale est qu'elle s'apparente très fortement à un principe de récurrence. En effet, une manière de comprendre la définition est de la lire comme disant : b est l'ancêtre de a si soit b est un parent de a (base de la récurrence), soit b est le parent d'un ancêtre de a (hypothèse de récurrence).

La définition du nombre entier chez Frege peut désormais être énoncée formellement. On dira que x est un nombre entier naturel, ce que l'on notera $N(x)$, si et seulement si x est soit identique à 0, soit est atteignable à partir de 0 moyennant l'ancestral de la relation de successeur immédiat :

(Nombre entier naturel) $N(x) :\equiv x = 0 \vee S^*(0, x)$.

6.4. **Le théorème de Frege.** Muni de la définition des nombres naturels, Frege donne une preuve de chacun des axiomes de Peano. En effet, chacun des axiomes peut s'énoncer en logique du second ordre. Cette dérivation est aujourd'hui connue sous le nom de Théorème de Frege, dont voici un énoncé (cf. [Wright, 1983], [Burgess, 2005]) :

(5) **Théorème de Frege :** *Les axiomes de Peano sont déductibles en logique du second ordre à partir du principe de Hume et des définitions pertinentes de zéro, du successeur, et de la notion de nombre entier naturel.*

La preuve de l'axiome 1 de Peano, qui dit que zéro est un nombre, est immédiate, puisqu'un nombre est défini comme tout objet qui est soit identique à 0, soit qui est un successeur de 0 (immédiat ou médiat). Je laisserai ici de côté la preuve des axiomes 2 à 4, pour me concentrer sur l'axiome 5, à savoir le principe d'induction. Énoncé en logique du second ordre à l'aide des définition de Frege, l'axiome 5 a la forme suivante :

(6) **Axiome d'induction :**
$\forall P(P(0) \wedge \forall x \forall y(N(x) \wedge P(x) \rightarrow (S(x, y) \rightarrow P(y))) \rightarrow \forall x(N(x) \rightarrow P(x)))$.

La partie du Théorème de Frege qui nous intéresse est donc le résultat suivant :

(7) **Théorème :** *L'axiome d'induction est prouvable en logique du second ordre assortie du principe de Hume à partir des définitions de 0, du successeur immédiat, et de la notion de nombre naturel fondée sur la relation ancestrale.*

Le nerf de la preuve réside presque tout entier dans la définition de la relation ancestrale donnée par Frege, mais la preuve requiert tout de même plusieurs transformations logiques, que le lecteur intéressé trouvera en annexe.

7. « Une définition, non un principe » ?

Bertrand Russell, le premier grand lecteur, grand pourfendeur [13], mais aussi grand continuateur de l'œuvre de Frege, donne dans son *Introduction à la Philosophie Mathématique*,

13. Grand pourfendeur car en 1902 Russell met à jour une contradiction dans le système de Frege. Cette contradiction est depuis lors connue sous le nom de « paradoxe de Russell » (d'après lequel il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles qui ne s'appartiennent pas eux-mêmes). Russell fait prendre conscience à Frege que l'un de ses principes (la loi fondamentale V, que j'ai laissée délibérément de côté dans cet article) aboutit en fait à la définition d'un tel ensemble, et par là à une contradiction. On doit en particulier à [Wright, 1983] d'avoir montré que la partie du système de Frege qui repose sur la logique du second ordre assortie du principe de Hume pouvait être préservée de ce naufrage, et par là que la loi V peut être abandonnée sans que l'édifice entier de Frege ne sombre. C'est cette partie, aujourd'hui appelée Arithmétique de Frege (FA), consistant en la logique du second ordre assortie du principe de Hume, qui fait l'objet d'une attention renouvelée des philosophes des mathématiques depuis trente ans, et dont un aperçu est donné ici. Voir notamment [Boolos, 1998b] pour une preuve que FA est cohérente si l'arithmétique de Peano du second ordre est cohérente, que Boolos attribue à Frege lui-même. Voir également [Burgess, 2005] pour une synthèse historique et mathématique détaillée.

paru en 1919, une présentation très éclairante de la conception fregéenne des nombres naturels. Au chapitre 3, il tire de l'exposé de Frege la leçon suivante à propos de l'induction mathématique :

> « L'utilisation de l'induction mathématique dans les démonstrations était, jadis, quelque peu mystérieuse. (...) Certains croyaient qu'il s'agissait réellement d'une induction, dans le sens que l'on donne à ce mot en logique. Pour H. Poincaré, il s'agissait d'un principe de la plus grande importance, grâce auquel un nombre infini de syllogismes pouvaient être condensés en un seul. Nous savons maintenant que toutes ces façons de voir sont des erreurs et que l'induction mathématique est une définition, non un principe. (...) Nous *définissons* les « nombres naturels » comme étant ceux qui possèdent toutes les propriétés inductives. Il s'ensuit que de telles démonstrations peuvent être appliquées aux nombres naturels, non pas en vertu de quelque intuition mystérieuse, d'un axiome ou d'un principe, mais en vertu d'une proposition purement verbale. »

Russell a certes raison de souligner que le principe de récurrence se ramène ici à une définition, puisque ce principe dérive directement de la définition des nombres naturels donnée par Frege. Une autre raison qui fait dire à Russell que l'induction mathématique est une définition est que d'autres nombres, par exemples les rationnels ou les réels, comme nous l'avons déjà souligné, manquent de satisfaire le principe d'induction, précisément parce qu'ils ne relèvent pas d'une définition inductive du même type. Par ailleurs le principe d'induction est bien une définition au sens où, à la différence de l'approche formaliste, le principe d'induction pour Frege n'est pas simplement une propriété axiomatique des nombres parmi d'autres, mais une part essentielle de leur définition explicite.

Malgré cela, est-il correct de penser que l'induction s'apparente intégralement à une définition, plutôt qu'à un principe ? Sous le terme de « principe », Russell semble entendre une règle d'inférence, ou encore un axiome. Certes, Frege montre que l'induction mathématique, comme axiome, et par suite comme règle d'inférence, est dérivable à partir d'une définition, mais on pourrait objecter que la définition même repose sur un principe inductif plus élémentaire. En effet, le cœur de cette définition se situe dans la notion de clôture transitive, dont la définition à son tour recèle un principe inductif (le principe qui assure que si x fait partie de N, alors tout successeur de x aussi en fait partie). On peut donc légitimement s'interroger sur la question de savoir si l'induction ne demeure pas un principe plus fondamental, y compris dans la perspective frégéenne (voir notamment [Boolos, 1984]).

Russell présente le principe d'induction comme une « proposition purement verbale », semblable à celle qui égale le sens de « quadrupède » à celui de « ayant quatre pattes ». Pour Russell, « nombre naturel » et « nombre inductif » sont des expressions analytiquement équivalentes en ce sens, et il n'est pas utile de chercher une justification plus profonde du concept « inductif ». Il est intéressant, à ce sujet, de souligner qu'un débat analogue se pose pour la notion de nombre. Comme nous l'avons vu, la définition frégéenne repose sur un premier principe, à savoir le principe de Hume. Le principe de Hume est en réalité l'objet d'une même controverse : certains, comme [Wright, 1999], y voient un principe analytique, au sens d'un principe qui donnerait la signification de la notion de nombre. D'autres, comme [Boolos, 1997], mettent en doute cette caractérisation, en particulier parce que Boolos y voit un principe riche de contenu mathématique, différent en ce sens d'un principe purement logique.

8. Conclusions

En résumé, il me semble avisé de conclure avec Poincaré que le principe de récurrence, bien que très proche en apparence de principes purement logiques, leur est cependant incommensurable. Le principe, comme le montre Frege, peut certes être démontré formellement à partir d'une définition de la notion de nombre – résultat en soi remarquable – mais cette définition elle-même s'appuie sur un premier principe inductif. Il n'en demeure pas moins que l'on doit au génie de Frege d'avoir recherché pour l'induction un fondement dans une théorie générale des suites (cf. le chapitre 3 de [Frege, 1879]), et en particulier dans une théorie du lien entre succession immédiate et succession médiate dans une suite. Nous devons en outre à Frege une conception des nombres qui l'oppose au formalisme, en cela que les postulats de Peano, au lieu de constituer le point de départ axiomatique d'une définition implicite du nombre, sont pour Frege des propriétés qui résultent d'une définition explicite, ancrée dans le principe de Hume.

S'agissant de l'œuvre de Frege, j'ajoute qu'elle connaît une actualité considérable en philosophie des mathématiques, comme en témoigne le nombre croissant de monographies et d'articles parus ces dernières années autour de ses travaux (voir notamment les contributions et bibliographies respectives de [Burgess, 2005], [Heck Jr., 2012], et [Zalta, 2015]). Signalons notamment le regain d'intérêt porté pour la logique d'ordre supérieur comme cadre général pour les mathématiques, ainsi que la parution en 2013 de la première édition anglaise intégrale des *Grundgesetze der Arithmetik*, par P. Ebert et M. Rossberg. Si les philosophes s'intéressent autant à Frege, et non pas seulement les historiens, c'est à la fois parce que le problème ontologique de la nature des nombres continue de faire énigme (entités abstraites ou concrètes ? concepts ou objets ?), mais aussi parce que Frege a ouvert des perspectives fondationnelles entièrement nouvelles, trop tôt masquées par l'insuccès plus criant de la contradiction de Russell. Au lecteur désireux d'en savoir plus, je recommande particulièrement la lecture de l'article de [Boolos, 1998a], qui reste à mes yeux la meilleure introduction à l'œuvre comme à la postérité de Frege.

Références

[Blanché and Dubucs, 1996] Blanché, R. and Dubucs, J. (1996). *La logique et son histoire*. Armand Colin.

[Boolos, 1984] Boolos, G. (1984). The justification of mathematical induction. In *PSA : Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, pages 469–475. Repr. in Boolos 1998b, chap. 24.

[Boolos, 1997] Boolos, G. (1997). Is Hume's principle analytic ? In Heck Jr., R., editor, *Logic, Language and Thought*. Oxford University Press. Repr. in [Boolos, 1998b], chap. 19.

[Boolos, 1998a] Boolos, G. (1998a). Gottlob Frege and the foundations of arithmetic. In [Boolos, 1998b], pages 143–154. Harvard University Press.

[Boolos, 1998b] Boolos, G. (1998b). *Logic, Logic and Logic*. Harvard University Press.

[Bostock, 1997] Bostock, D. (1997). *Intermediate Logic*. Oxford University Press.

[Burgess, 2005] Burgess, J. P. (2005). *Fixing Frege*. Princeton University Press.

[Dedekind, 1888] Dedekind, R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen ?* Fried. Vieweg & Sohn - Braunschweig.

[Dehornoy, 2002] Dehornoy, P. (2002). Progrès récents sur l'hypothèse du continu [d'après Woodin]. *Séminaire Bourbaki*, 915.

[Feferman, 1999] Feferman, S. (1999). Does mathematics need new axioms ? *American Mathematical Monthly*, pages 99–111.

[Frege, 1879] Frege, G. (1879). *Idéographie*. Vrin 1999. Traduction française par C. Besson, avec une posface de J. Barnes.

[Frege, 1884] Frege, G. (1884). *Les fondements de l'arithmétique*. Seuil 1969. Traduction française par C. Imbert.

[Frege, 1894] Frege, G. (1894). *Grundgesetze der Arithmetik*. Traduction anglaise par P. Ebert et M. Rossberg, sous le titre "The basic laws of arithmetic", préfacée par C. Wright, avec une annexe de R. Cook, Oxford University Press 2013.

[Gödel, 1947] Gödel, K. (1947). Sur la nature du problème du continu de Cantor. In Largeault, J., editor, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, pages 509–531. Trad. française et notice par J. Largeault.

[Heck Jr., 2006] Heck Jr., R. (2006). *Frege's theorem*. Oxford University Press.

[Heck Jr., 2012] Heck Jr., R. (2012). *Reading Frege's* Grundgesetze. Oxford University Press.

[Hempel, 1945] Hempel, C. G. (1945). On the nature of mathematical truth. *American Mathematical Monthly*, pages 543–556.

[Hilbert, 1899] Hilbert, D. (1899). Lettre à Frege datée du 29 décembre 1899. In Rivenc, F. and de Rouilhan, P., editors, *Logique et Fondement des Mathématiques*, pages 225–229. Payot. Traduction française et présentation par J. Dubucs.

[Hilbert, 1926] Hilbert, D. (1926). Sur l'infini. In Largeault, J., editor, *Logique mathématique : Textes*, pages 215–245. Armand Colin. Traduction J. Largeault.

[Hilbert, 1927] Hilbert, D. (1927). Les fondements des mathématiques. In Largeault, J., editor, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, pages 145–163. Vrin. Traduction française et notice par J. Largeault.

[Peano, 1889] Peano, G. (1889). *Arithmetices Principia nova methodo exposita*. Bocca : Torino.

[Poincaré, 1894] Poincaré, H. (1894). Sur la nature du raisonnement mathématique. *Revue de métaphysique et de morale*, pages 371–384. Repr. in *La Science et l'Hypothèse*, chap. 1, Flammarion.

[Poincaré, 1906] Poincaré, H. (1906). Les mathématiques et la logique – la logique de Hilbert. *Revue de métaphysique et de morale*, pages 17–34.

[Russell, 1919] Russell, B. (1919). *Introduction à la philosophie mathématique*. Payot. Traduction francaise par G. Morreau.

[van Atten, 2015] van Atten, M. (2015). Intuition, iteration, induction. Manuscrit, SND, Paris.

[Wright, 1983] Wright, C. (1983). *Frege's conception of numbers as objects*. Aberdeen University Press.

[Wright, 1999] Wright, C. (1999). Is Hume's principle analytic ? *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40 :6–30.

[Zalta, 2015] Zalta, E. N. (2015). Frege's theorem and foundations for arithmetic. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2015 edition. http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/frege-theorem/.

Annexe : la preuve du principe de récurrence

Voici la preuve par Frege de l'axiome d'induction, telle que reconstruite par R. Heck, Jr. en suivant les *Grundgesetze* de Frege (GG) (cf. [Heck Jr., 2012], pp. 152–155). La preuve suit essentiellement de la définition de la relation ancestrale, mais elle implique plusieurs transformations logiques, comme indiqué par les lemmes suivants, que je reproduis ici pour permettre au lecteur d'y accéder directement.

Comme Heck, nous noterons R^* la clôture transitive de R, et $R^{*=}$ la clôture réflexive transitive, soit la relation telle que $R^{*=}(a,b)$ ssi $R^*(a,b) \vee a = b$.

Lemme 1. *[GG, Théorème 123]* $R^*(a,n) \wedge \forall x(R(a,x) \to P(x)) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \to P(y)) \to P(n)$.

Preuve. Immédiat à partir de la définition de R^*. □

Lemme 2. *[GG, Théorème 128]* $R^*(a,n) \wedge P(a) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \to P(y)) \to P(n)$.

Preuve. De Pa et de $\forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \to P(y))$, on déduit $\forall y(R(a,y) \to P(y))$, et donc l'antécédent du Lemme 1 précédent. □

Lemme 3. *[GG, Théorème 144]* $(R^{*=}(a,n) \wedge P(a) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \to P(y)) \to P(n)$.

Preuve. Posons $\phi :\equiv [P(a) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \to P(y))]$. Par le Lemme 2 on sait que $R^*(a,n) \wedge \phi \to P(n)$. Or $a = n \wedge P(a) \to P(n)$, donc $a = n \wedge \phi \to P(n)$. Il suit logiquement que $(R^*(a,n) \vee a = n) \wedge \phi \to P(n)$, de quoi le lemme résulte. □

Lemme 4. *[GG, Théorème 152]* $(R^{*=}(a,n) \wedge P(a) \wedge \forall x \forall y((R^{*=}(a,x) \wedge P(x) \wedge R(x,y) \to P(y)) \to P(n)$.

Preuve. Supposons l'antécédent du conditionnel à démontrer. On montre qu'une version de l'antécédent du Lemme 3 en dérive, et que $P(n)$ en résulte par modus ponens. Dans le Lemme 3, substituons à toute occurrence de $P(\cdot)$ la propriété $R^{*=}(a,\cdot) \wedge P(\cdot)$. Cela donne pour l'antécédent : $R^{*=}(a,n) \wedge R^{*=}(a,a) \wedge P(a) \wedge \forall x \forall y(R^{*=}(a,x) \wedge P(x) \wedge R(x,y) \to R^{*=}(a,y) \wedge P(y))$. Pour démontrer cette clause sous l'hypothèse de l'antécédent du présent lemme, il suffit de montrer que $R^{*=}(a,a)$ et que pour tous x et y, $R^{*=}(a,x) \wedge Px \wedge R(x,y) \to R^{*=}(a,y) \wedge Py$. La première condition est immédiate, car elle suit de $a = a$. Pour la seconde, supposons $R^{*=}(a,x) \wedge P(x) \wedge R(x,y)$. Étant donnée l'hypothèse que $R^{*=}(a,x) \wedge P(x) \wedge R(x,y) \to P(y)$, il suit que $P(y)$. Par ailleurs, $R^{*=}(a,y)$ est démontrable sous l'hypothèse que $R^{*=}(a,x) \wedge R(x,y)$. Il resulte du Lemme 3 que $R^{*=}(a,n) \wedge P(n)$, donc en particulier $P(n)$.□

Théorème 1. *L'axiome d'induction est prouvable en logique du second ordre assortie du principe de Hume à partir des définitions de 0, du successeur, et de la notion de nombre entier naturel fondée sur la relation ancestrale.*

Preuve. Le Lemme 4 se récrit comme suit : $P(a) \wedge \forall x \forall y((R^{*=}(a,x) \wedge P(x) \wedge R(x,y) \to P(y)) \to (R^{*=}(a,n) \to P(n))$. En substituant 0 pour a, et S pour R, et en généralisant universellement sur P et sur n, on obtient exactement l'axiome d'induction. □