Logique propositionnelle
et conditionnel matériel

M. Cozic (DEC, ENS) & P. Égré (CNRS, IJN)

10 février 2008

1 Préambule

• Pourquoi s'intéresser aux énoncés conditionnels ? Place dans les raisonnements mathématiques, pratiques, causaux :

(1) Si c'est un carré, alors c'est un rectangle

(2) Si je me dépêche, j'arriverai à l'heure

(3) Si Napoléon n'avait pas perdu la guerre à Waterloo, la France serait un Empire.

• L'étude des conditionnels fait partie de l'analyse sémantique du langage (analyse de la signification, via celle des conditions de vérité des énoncés).

(4) Si c'est un carré, alors c'est un rectangle

(5) Si c'est un rectangle, alors c'est un carré.

• La notion de conditionnalité et voisine de celle de conséquence logique, qui constitue l'objet même de la logique :

(6) Si c'est un carré, alors c'est un rectangle.

(7) C'est un carré. Donc c'est un rectangle.

• Les conditionnels représentent par ailleurs une sorte de fil conducteur de l'histoire de la logique. Les conditionnels ont été discutés d'abord chez les Mégariques (débat Diodore Cronos vs Philon), puis chez les Stoïciens. L'analyse du conditionnel proposée par Philon ressurgit dans l'*Idéographie* de Frege (1879), elle est reprise chez Russell et Whitehead dans les *Principia Mathematica* (1910). Jugée insatisfaisante, elle donne lieu à la naissance de la logique modale (C. I. Lewis, ca. 1920). Puis l'analyse sémantique de la logique modale (notamment Kripke, 1959) nourrit à son tour des analyses nouvelles des conditionnels, en particulier des conditionnels contrefactuels (Goodman 1947, Stalnaker 1968, D. Lewis 1973). L'analyse des conditionnels a également donné lieu à des avancées en théorie de la preuve (logiques de la pertinence ou relevance, Anderson et Belnap ca. 1970).

• Par où commencer ? Par la logique propositionnelle, qui constitue l'analyse de référence du conditionnel comme conditionnel matériel (cf. Philon, Frege).

2 L'expression du conditionnel en langue naturelle

si...alors...

(8) Si P alors Q

P : antécédent, protase
Q : conséquent, apodose

Indicatifs vs Subjonctifs (Kaufmann 2005)

(9) Si tu grattes l'allumette, elle s'allumera [indicatif présent, prédictif]

(10) Si tu as gratté l'allumette, elle s'est allumée [indicatif passé, épistémique]

(11) Si tu grattais l'allumette, elle s'allumerait [irréel du présent, prédictif]

(12) Si tu avais gratté l'allumette, elle se serait allumée [irréel du passé, contrefactuel]

L'impératif (Bhatt et Pancheva 2005)

(13) Caresse mon chien, et tu attraperas des puces

(14) Caresse mon chien, ou tu attraperas des puces

(15) P et Q ; si P alors Q

(16) P ou Q ; si non-P alors Q

Pas...Pas

(17) Pas d'argent, pas de ciné

(18) Pas de Hitler, pas de bombe A (Lewis 1972)

A moins que

(19) Pierre te donnera 10 euros, à moins que tu l'embêtes

(20) Pierre te donnera 10 euros, sauf si tu l'embêtes

3 Le conditionnel matériel

Motivations :
- traiter si..., alors... comme un connecteur binaire, à la manière de et, ou
- premier traitement sémantique du conditionnel : traitement vérifonctionnel

3.1 Rappels de logique propositionnelle

3.1.1 Syntaxe

Définition 1
*L'**alphabet** d'un langage propositionnel est la donnée*

1. *d'un ensemble de formules atomiques* $At = \{p, q, r, ...\}$
2. *d'un ensemble de connecteurs :* $\{\neg \vee, \wedge, \rightarrow\}$
3. *d'une parenthèse ouvrante et d'une parenthèse fermante* $\{), (\}$

Définition 2
L'ensemble des **formules** *du langage propositionnel est l'ensemble des expressions tel que*
(i) toute formule atomique $p \in At$ est une formule
(ii) si ϕ est une formule, alors $\neg\phi$ est une formule
(iii) si ϕ et ψ sont des formules, alors $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ sont des formules
(iv) Rien d'autre n'est une formule.

3.1.2 Sémantique

Négation

$V(\phi)$	$V(\neg\phi)$
1	0
0	1

$V(\neg\phi) = 1$ ssi $V(\phi) = 0$
$V(\neg\phi) = 1 - V(\phi)$
La négation est interprétée par une fonction $neg : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\} : neg(x) = 1 - x$.

Conjonction

$V(\phi)$	$V(\psi)$	$V((\phi \wedge \psi))$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$V((\phi \wedge \psi))$ ssi $V(\phi) = V(\psi) = 1$
$V((\phi \wedge \psi)) = \min(V(\phi), V(\psi))$
La conjonction est interprétée par une fonction $conj : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\} : conj(x,y) = min(x,y)$.

Disjonction

$V(\phi)$	$V(\psi)$	$V((\phi \vee \psi))$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$V((\phi \vee \psi)) = 1$ ssi $V(\phi) = 1$ ou $V(\phi) = 1$
$V((\phi \vee \psi)) = \max(V(\phi), V(\psi))$
La disjonction est interprétée par la fonction $disj : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\} : disj(x,y) = \max(x,y)$.

Conditionnel

$V(\phi)$	$V(\psi)$	$V((\phi \to \psi))$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$V((\phi \to \psi)) = 0$ ssi $V(\phi) = 1$ et $V(\psi) = 0$
Le conditionnel est interprété par une fonction *cond* : $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{0, 1\}$: $cond(x, y) = 0$ ssi $x = 1$ et $y = 0$

3.1.3 Interprétation du conditionnel matériel

- Sextus Empiricus, *Adv. Math*, VIII
  "Philon disait que le conditionnel est vrai lorsqu'il ne commence pas avec le vrai pour finir avec le faux ; de sorte qu'il y a pour ce conditionnel trois façons d'être vrai et une d'être faux"
- Frege à Husserl 1906
  "Mais supposons que les lettres 'A' et 'B' désignent des propositions propres. Alors il n'y a pas seulement des cas dans lesquels A est vrai et des cas dans lesquels A est faux ; mais soit A est vrai, soit A est faux ; *tertium non datur*. La même chose vaut de B. On a donc quatre combinaisons :
  A est vrai et B est faux,
  A est vrai et B est vrai
  A est faux et B est vrai
  A est faux et B est faux.
  De celles-ci la première, troisième et quatrième sont compatibles avec la proposition "si A alors B", mais non la seconde."

3.1.4 Propriétés du conditionnel matériel

Rappel : on dit que ϕ est une tautologie (vérité logique) ssi pour toute valuation (distribution de valeur de vérité) V aux atomes de ϕ, $V(\phi) = 1$ (noté $\models \phi$). On dit qu'un ensemble Γ de formules a pour conséquence logique ϕ ssi toute valuation qui rend vrai tous les membres de Γ rend vrai ϕ (noté $\Gamma \models \phi$).

Tautologies

1. $\models ((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$ (contraposition)
2. $\models ((p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r))$ (transitivité)
3. $\models (((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r)))$ (exportation)
4. $\models ((p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r))$ (importation)
5. $\models (\neg p \to (p \to q))$ (fausseté de l'antécédent)
6. $\models (p \to (q \to p))$ (vérité du conséquent)
7. $\models [(p \vee q) \to r] \leftrightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)]$ (simplification des antécédents disjonctifs)

Conséquences logiques

- Les 5 syllogismes fondamentaux "indémontrables") de Chrysippe :
  1) *Modus (ponendo) ponens* : $p \rightarrow q$; $p \therefore q$
  2) *Modus (tollendo) tollens* : $p \rightarrow q$; $\neg q \therefore \neg p$
  3) $\neg(p \wedge q)$; $p \therefore \neg q$
  4) p ou q ; $p \therefore \neg q$
  5) Syllogisme disjonctif : p ou q ; $\neg q$; $\therefore p$

1. $\{p, (p \rightarrow q)\} \models q$ (*modus ponens*)
2. $\{\neg q, (p \rightarrow q)\} \models \neg p$ (*modus tollens*)
3. $\neg p \models (p \rightarrow q)$ (fausseté de l'antécédent, bis)
4. $p \models (q \rightarrow p)$ (vérité du conséquent, bis)
5. $(p \rightarrow q) \models ((p \wedge r) \rightarrow q)$ (renforcement de l'antécédent)
6. $(p \vee q) \models (\neg p \rightarrow q)$ ("du-ou-au-si")

Théorème de la déduction

- Sextus Empiricus, Adv. Math, VIII, 417
  "Ainsi, un argument est réellement valide quand, après qu'on a conjoint les prémisses et formé le conditionnel ayant la conjonction des prémisses comme antécédent et la conclusion comme conséquent, on trouve que le conditionnel est vrai"

Théorème 1 (Théorème sémantique de la déduction)
Soient ϕ, ψ des formules.

$$\phi \models \psi \textit{ ssi } \models (\phi \rightarrow \psi)$$

Corollaire 1
Si $\Gamma = \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ est un ensemble fini de formules et ψ une formule quelconque, alors

$$\Gamma \models \psi \textit{ ssi } \models ((\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \rightarrow \psi)$$

Ce corollaire nous donne une autre méthode pour examiner avec les tables de vérité la validité d'un argument.

Exemple 1
Nous avons vu que si $\{(p \rightarrow q), p\} \models q$. Ceci est équivalent à

$$\models (((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q)$$

Equivalences remarquables

$(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$
$(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$ (contraposition)

4 “$\rightarrow$" et “si...alors..." en langue naturelle

4.1 Arguments en faveur de $\rightarrow$ (“splendeurs" de $\rightarrow$)

1. $(p \rightarrow q)$ est faux quand p est vrai et q est faux. Le conditionnel matériel saisit les conditions de fausseté du conditionnel (indicatif) de la langue naturelle.

   (21) Jean est venu

   (22) Marie n'a pas été contente

   (23) Si Jean est venu, Marie a été contente

2. le *modus ponens* : la règle d'inférence fondamentale
   Voir cependant le contre-exemple de V. McGee, “A Counterexample to Modus Ponens", *Journal of Philosophy*, 1985 :

   Si un Républicain gagne, alors si Reagan ne gagne pas, Anderson gagnera.
   Un Républicain gagnera.
   ____
   Si Reagan ne gagne pas, Anderson gagnera.

   Contexte : 1980, Reagan et Anderson sont candidats républicains, Reagan devant Carter (démocrate) dans les sondages, et Carter devant Anderson.

3. argument par élimination parmi les fonctions booléennes binaires
   - fonctions booléennes binaires $f : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$.
   - 2^{2^n} fonctions booléennes n-aires.

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
		$\bot$	$\nmid$			$\wedge$			$\leftrightarrow$	$\not\leftrightarrow$			$\mid$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\vee$	$\top$

   Remarque : l'argument présuppose que la logique bivalente classique est adéquate pour traiter le conditionnel de la langue naturelle.

4. formalisation des mathématiques :

   (24) Si deux nombres ont le même successeur, alors ils sont identiques

   (25) $\forall x_1 \forall x_2 (Sx_1 = Sx_2 \rightarrow x_1 = x_2)$

   (26) Si 0 a la propriété exprimée par F et si, quand un nombre x a la propriété exprimée par F, alors son successeur l'a également, alors tous les nombres ont la propriété exprimée par F

   (27) $(F(0) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow F(Sx)) \rightarrow \forall x(F(x))$

4.2 Misères de $\rightarrow$?

1. les **paradoxes de l'implication matérielle** :

   (a) paradoxe de la fausseté de l'antécédent :
   $\neg p \models (p \rightarrow q)$ (fausseté de l'antécédent, bis)
   "si p est faux, p implique n'importe quelle proposition"

(28) Si Paris est en Bretagne, alors 2+2=4

(29) Si Paris est en Bretagne, alors la Lune est en fromage

(30) $\dfrac{\text{Les socialistes ne gagneront pas les prochaines municipales.}}{\text{Si les socialistes gagnent les prochaines législatives, ils instaureront la dictature du prolétariat.}}$

(b) paradoxe de la vérité du conséquent :
$p \models (q \rightarrow p)$ (vérité du conséquent, bis)
"si p est vrai, p est impliqué par n'importe quelle proposition"

(31) Si Sarkozy est président, alors Paris est en Ile-de-France

(32) Si la Lune est en fromage, alors Paris est en Ile-de-France

(33) $\dfrac{\text{Jean fera cours à 10 heures.}}{\text{Si Jean meurt à 9 heures, alors il fera cours à 10 heures.}}$

(34) $\dfrac{\text{2 est pair.}}{\text{Si la conjecture de Goldbach est fausse, alors 2 est pair.}}$

G. Frege, (1879, *Idéographie*, Vrin, 1999 :
“la liaison causale qui réside dans le mot “si" n'est pas exprimée par nos signes"

2. **vérifonctionnalité** : le conditionnel matériel est une fonction de vérité (fonction booléenne binaire) : si ϕ, ψ, χ, θ sont des formules telles que
- $V(\phi) = V(\chi)$
- $V(\psi) = V(\theta)$
alors nécessairement $V(\phi \rightarrow \psi) = V(\chi \rightarrow \theta)$

Scénario : Pierre pèse 70kg

(35) Si je pèse 150 kg, je pèse moins de 25 kg

(36) Si je pèse 150 kg, je pèse plus de 100 kg

Intuition : le premier énoncé est nécessairement faux ; le second est nécessairement vrai ; mais le conséquent, comme l'antécédent, est faux à chaque fois (relativement à la situation présente)

Quine 1950 : “it is not usual in practice to form conditionals out of component statements whose truth or falsity is already known unconditionally. ... Only those conditionals are worth affirming which follow from some manner of relevance between antecedent and consequent – some law, perhaps, connecting the matters which these two component statements describe. But such connection underlies the useful application of the conditional without needing to participate in its meaning"

3. **RTC** (renforcement-transitivité-contraposition) :

(a) renforcement de l'antécédent $(p \rightarrow q) \models ((p \wedge r) \rightarrow q)$

(37) Si Jean ajoute du sucre dans son café, il le trouvera meilleur

(38) Si Jean ajoute du sucre et un peu d'essence dans son café, il le trouvera meilleur

(b) transitivité

(39) Si François gagne l'élection, Nicolas se consacrera à sa vie familiale

(40) Si Nicolas meurt demain, François gagnera l'élection

(41) Si Nicolas meurt demain, Nicolas se consacrera à sa vie familiale

(c) contraposition

(42) Si Goethe avait vécu au-delà de 1832, il ne serait plus en vie au jour d'aujourd'hui

(43) Si Goethe était encore en vie au jour d'aujourd'hui, il n'aurait pas vécu au-delà de 1832

4. la **négation** : $\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$

(44) $\dfrac{\text{Il n'est pas vrai que si Dieu existe, alors les criminels iront au paradis.}}{\text{Dieu existe et les criminels n'iront pas au paradis.}}$

Couramment, on tend à interpréter la négation d'un conditionnel "si A alors B" plutôt comme signifiant "si A, alors non-B", et non comme une conjonction.

(45) Si Dieu existe, les criminels n'iront pas au paradis

5. **Un connecteur binaire ?** (Bhatt et Pancheva 2005, cf also Lycan)
a) les clauses en *si* peuvent apparaître en position initiale et en position finale, contrairement à *ou, et*

(46) Si Pierre est allé à Paris, Pierre est allé à Lyon

(47) Pierre est allé à Lyon si Pierre est allé à Paris

(48) Pierre est allé à Paris ou/et Pierre est allé à Lyon

(49) *Ou/et Pierre est allé à Lyon, Pierre est allé à Paris

b) "Même si", "seulement si", "sauf si"

(50) Pierre te donnera 5 euros, même si Marie t'a donné 10 euros

(51) Pierre te donnera 5 euros, *même ou/et Marie t'a donné 10 euros

c) ellipse

(52) I will leave if you do and John will ~~leave if you do~~, too

(53) I will leave if you do and John will *do so* too

Conclusion (Bhatt & Pancheva 2005) :

> "The data involving modification by *only* and *even*, and VP ellipsis phenomena provide strong evidence against the view that the antecedent and consequent of conditionals are coordinated. These data support the view that *if*-clauses are adverbials, like temporal phrases and clauses. Furthermore, pronominalization by *then* suggests that *if*-clauses are advervials, since their anaphoric reflex - *then* - is an adverb".

d) adverbes / clauses adverbiales

(54) Demain, Marie ira au cinéma

(55) Si elle finit à temps, Marie ira au cinéma

6. **Conditionnels contrefactuels / indicatifs**

(56) If Walburg had attended, the measure would have lost

Quine (*Methods of Logic*, The Conditional) : "Whoever affirms a conditional thus in the subjunctive mood...does not consider that such a conditional is automatically false (like $p \to q$) simply by the falsity of the antecedent"

"Whatever the proper analysis of the contrafactual conditional may be, we may be sure in advance that it cannot be truth-functional ; for, obviously ordinary usage demands that some contrafactual conditionals with false antecedents and false consequents be true and that other contrafactual conditionals with false antecedents and false consequents be false".

(57) Si je pesais plus de 150 kg, je pèserais plus de 100 kg

(58) Si je pesais plus de 150 kg, je pèserais moins de 25 kg

(59) Si Napoléon n'avait pas été vaincu à Waterloo, la France serait un Empire

• L'antécédent, "Napoléon n'a pas été vaincu à Waterloo", est faux. Le conséquent : "La France est un Empire" est faux. Cependant : Est-ce adéquat de dire que conséquent et antécédent sont "faux" ? Que se passe-t-il si l'on regarde : "Napoléon n'avait pas été vaincu à Waterloo", et "La France sera un Empire" ? Relativement à quel point de référence faut-il déclarer de tels énoncés vrais ou faux ?

• Conclusion de Quine : "the material conditional is put forward as an analysis...at most of the ordinary singular conditional in the indicative mood".