Cours 6
Les subvaluations

15 mars 2011

1 Complément sur les supervaluations

1.1 Définition en termes de modèles totaux

On se base ici sur Ripley (2010) et Cobreros et al. (2010)

1.1.1 Le cas propositionnel

Voici une autre manière de présenter la notion de supervaluation que celle nous avons utilisée. L'idée est qu'au lieu de partir d'un modèle partiel et de considérer toutes ses extensions admissibles, on se donne un ensemble de modèles totaux dès le départ.

Considérons un langage propositionnel. Soit v une valuation totale pour le langage, et soit S un ensemble de valuations totales admissibles pour le même langage contenant v.

Soir $B = \{0, 1\}$ l'ensemble des valeurs booléennes habituelles (Vrai et Faux)

On dira que $v(\phi) = \{v \in B; \exists s \in S$ telle que $s(\phi) = v\}$
Trois cas de figures peuvent se présenter:
$v(\phi) = \{0\}$
$v(\phi) = \{1\}$
$v(\phi) = \{0, 1\}$

Définition: on dira que ϕ est (super)-vraie ssi $v(\phi) = \{1\}$, (super)-fausse ssi $v(\phi) = \{0\}$, et $v(\phi)$ n'est ni vraie ni fausse sinon.

Pour indiquer la relativisation à un espace de précisifications, on écrira: $(v, S) \models_{SV} \phi$ pour dire que pour tout $v' \in S$: $v'(\phi) = \{1\}$

On peut définir la conséquence logique comme suit:

$\Gamma \models_{SV} \Delta$ ssi pour tout modèle (v, S): si $(v, S) \models_{SV} \gamma$ pour toute formule $\gamma \in \Gamma$, alors $(v, S) \models_{SV} \delta$ pour au moins une formule de Δ

1.1.2 Le cas des prédicats

On aura de la même façon un modèle total $M = (D, I)$ et un ensemble de modèles totaux $\mathcal{M}$ qui inclut M et tel que tous les modèles M' de $\mathcal{M}$ où $M' = (D', I')$ sont tels que: $D = D'$ (même domaine) et $I(a) = I'(a)$ pour toute constante d'individu.

Etant donné $(\mathcal{M}, M)$ on dira que $M_{\mathcal{M}}(\phi) = \{v \in B; \exists M' \in \mathcal{M} : M'(\phi) = v\}$

2 Supervaluations et logique classique

Validité: ϕ est SV-valide ssi ϕ est vraie dans toute supervaluation basée sur tout modèle v.

Conséquence logique: $\Gamma \models_{SV} \Delta$ ssi si tous les $\gamma \in \Gamma$ sont super-vrais, alors au moins un $\delta \in \Delta$ est super-vrai.

- La fois dernière nous avons vu que:
  $\models_{CL} \phi$ ssi $\models_{SV} \phi$.
- Mais qu'en est-il de la conséquence logique en général?

  $\phi_1, ..., \phi_n \models_{CL} \psi_1, ..., \psi_k$ ssi $\phi_1, ..., \phi_n \models_{SV} \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

  Preuve: supposons que $\phi_1, ..., \phi_n \not\models_{CL} \psi_1, ..., \psi_k$. Alors il existe un v qui rend vrais tous les ϕ ensemble, mais ne rend vrai aucun des ψ, donc rend faux: $\psi_1 \vee ... \vee \psi_k$. Puisque ce modèle est total, il rend super-vrais les ϕ, mais non super-vraie la disjonction $\psi_1 \vee ... \vee \psi_k$.

  Inversement, si $\phi_1, ..., \phi_n \not\models_{SV} \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$, alors chaque ϕ est super-vrai, mais pas la disjonction des ψ. Donc il existe au moins une valuation classique qui rend vrais tous les ϕ, mais faux chacun des ψ.

- Elimination de la disjonction:

  Classiquement: $\phi \vee \psi \models_{CL} \phi, \psi$.

  Mais: $\phi \vee \psi \not\models_{SV} \phi, \psi$.

  ex: $Pa \vee \neg Pa \not\models_{SV} Pa, \neg Pa$. La disjonction est super-vraie, mais aucun des disjoints ne l'est.

- Quantification:

  Classiquement: $\exists x Fx, \forall x(x = a \vee x = b) \models_{CL} Fa, Fb$

  $\exists x Fx, \forall x(x = a \vee x = b) \not\models_{SV} Fa, Fb$.

- Application: le cas du sorite.

3 Les subvaluations

Jaskowski 1948, Varzi 1994, Hyde 1997, 2008

• Au lieu de lacunes de valeur de vérité (*truth-value gaps*), on peut parler ici de surplus de valeur de vérité (*truth-value gluts*).

> The difference [with supervaluations] is that subvaluational semantics treats borderline cases for a vague predicate like "heap" as cases to which the predicate both applies and does not apply. That is, if a is a borderline case for "heap" then "a is a heap" is true and "a is not a heap" is true (i.e. "a is a heap" is false).

Quelles sont les motivations pour une approche de ce type, qu'on appelle encore *paraconsistente* ? Hyde indique qu'on trouve déjà l'idée dans la philosophie marxiste, notamment chez le théoricien marxiste Plekhanov (1908)

> A seedling in the process of becoming a tree is said to be both a seedling (by virtue of what it was) and not a seedling (by virtue of what it will become); a man growing a beard is at some stage both bearded and not bearded. Terms such as "seedling" and "bearded" are vague predicates in the modern sense, yet for classical marxists they are characteristically dialectical, issuing in contradictions. (Hyde 2008: 94)

1) Si un énoncé p est indéterminé en v: alors il existe une précisification v' de v telle que $v'(p) = 1$. Il existe aussi une précisification v'' de v telle que $v''(p) = 0$, ie telle que $v''(\neg p) = 1$. D'aprËs la définition, p et $\neg p$ peuvent Ítre sub-vrais ensemble.

• Remarque: penser au carré aristotélicien des oppositions. Deux énoncés du type $\exists x P(x)$ et $\exists x \neg P(x)$ peuvent Ítre vrais ensemble classiquement (on les appelle classiquement *sub-contraires*).

• Ici, la notion de sub-vérité correspond à une notion de *satisfaisabilité*: un énoncé est sub-vrai s'il est *possible* de le rendre vrai.

• Un énoncé sera dit *sub-faux* s'il est faux dans au moins une précisification. p est sub-faux $\Leftrightarrow$ p est faux dans au moins une précisification $\Leftrightarrow$ $\neg p$ est vrai dans un moins une précisification $\Leftrightarrow$ $\neg p$ est sub-vrai.

2) $\phi := H(a) =$ "a est un tas". Si a est un cas incertain ou pénombral de tas, cela signifie que $H(a)$ est indéterminé dans le modèle de départ v. Mais il existe deux précisifications, l'une qui rend $H(a)$ vrai, l'autre qui rend $H(a)$ faux. Donc "a est un tas" est dans ce cas sub-vrai et sub-faux, soit vrai et faux au sens de la théorie subvaluationniste.

3) Bien que p et $\neg p$ puissent être (sub)-vrais ensemble, il ne suit pas que $p \wedge \neg p$ puisse Ítre (sub)-vrai. En effet, existe-t-il une précisification dans laquelle $p \wedge \neg p$ puisse être vrai

? Non, car toute précisification v' de v est classique: si $v'(p) = 1$, alors $v'(\neg p) = 0$ et réciproquement. Soit, $v'(p \wedge \neg p) = 0$.

Ce fait permet d'expliquer pourquoi la logique subvaluationniste peut être vue comme une logique *paraconsistente*. C'est-à-dire que dans cette logique, un énoncé et sa négation peuvent être vrais ensemble sans qu'il en résulte nécessairement une contradiction:

$$p, \neg p \not\models_{SbV} p \wedge \neg p$$

La logique classique, en revanche, est une logique *consistente*, qui est telle que de p et $\neg p$ il suit $\bot$, et donc n'importe quel énoncé peut suivre.

Au contraire, Hyde (2008: 93) souligne que:

> [truth-value gluts] accept that a sentence and its negation might be true in a theory without every sentence and its negation being true. Gluts do not explode everywhere – the logic is non-explosive.

4) **Validité.** Classiquement, je rappelle qu'un énoncé ϕ est logiquement valide ($\models \phi$) ssi il est vrai dans toutes les valuations. Ici, de façon analogue, on dit que ϕ est sub-valide ($\models_{SbV}$) ssi ϕ est sub-vraie relativement à tout modèle v.

i) Montrons que $\models \phi$ implique $\models_{SbV} \phi$. Raisonnons par contraposition. Supposons que ϕ n'est pas sub-valide. Alors il existe un modèle v relativement auquel ϕ n'est pas sub-vrai. Relativement à ce modèle, toute précisification rend ϕ faux. Mais comme ces précisifications sont des valuations classiques, cela implique que $\not\models \phi$.

ii) Montrons la réciproque. Supposons que ϕ n'est pas classiquement valide. Alors il existe une valuation classique v qui rend ϕ faux. Clairement, aucune précisification de v ne peut rendre ϕ vrai, puisque toute précisification de v coïncide avec v elle-même.

iii) De i) et ii) il suit donc que $\models_{CL} \phi$ ssi $\models_{SbV} \phi$.

5) **Conséquence logique.** La notion de conséquence logique subvaluationniste est définie comme *préservation de la sub-vérité* (relativement à un ensemble de précisifications V), de mÍme que la notion classique est définie comme *préservation de la vérité* (des prémisses à la conclusion).

Montrer que le schéma du modus ponens n'est pas un schéma qui préserve la sub-vérité. Considérons la situation o˘ p est indéterminé dans le modèle de départ. Imaginons que l'ensemble V des précisifications qui nous intéressent à la forme suivante:

	p	q	$p \to q$
v'	1	0	0
v''	0	0	1

On voit que relativement à cet ensemble, p et $p \to q$ sont chacun sub-vrais. Mais q n'est pas sub-vrai, puisque q est toujours faux.

6)

	$H(3)$	$H(2)$	$H(1)$	$\neg H(1)$	$H(3) \to H(2)$	$H(2) \to H(1)$	$\forall n(H(n+1) \to H(n))$
v	1	#	0	1	#	#	#
v'	1	0	0	1	0	1	0
v''	1	1	0	1	1	0	0

On voit que $H(1)$ n'est vrai dans aucune précisification, donc $\neg H(1)$ en revanche est toujours vrai, et a fortiori $\neg H(1)$ est sub-vrai. Idem pour $H(3)$. Et chacun des conditionnels est vrai dans au moins une précisification.

Ici on a une situation dans laquelle le sorite n'aboutit pas à une contradiction. $H(3)$ est sub-vrai, de même pour $\neg H(1)$ et pour chacun des conditionnels intermédiaires. Cette situation est possible, naturellement, parce que le modus ponens ne préserve pas la super-vérité de $H(3)$.

7) Comparaison avec les supervaluations. Dans le cas supervaluationniste, on a vu que l'argument soritique est valide, mais incorrect. Ainsi, $H(3)$ et $\neg H(1)$ seraient super-vrais dans la situation décrite, mais le conditionnel $\forall n(H(n+1) \to H(n))$ n'est pas super-vrai (il est mÍme super-faux). Le schéma du modus ponens en revanche reste valide au sens de la conséquence supervaluationniste, car si ϕ et $\phi \to \psi$ sont chacun super-vrais, ils sont vrais chacun dans toutes les précisifications (du mÍme espace) et donc ψ doit l'Ítre aussi.

Ici, au contraire, le modus ponens n'est pas valide au sens de la conséquence subvaluationniste, et du coup le sorite échoue à produire une contradiction.

Cependant, considérons la version quantifiée des conditionnels: $\forall n(H(n+1) \to H(n))$. Cet énoncé est-il subvrai? La réponse est non, comme le montre la colonne de droite. Cet énoncé n'est vrai dans aucune précisification, donc il n'est pas subvrai. Cela suggère une étrangeté de l'approche subvaluationniste: chacune des instances du conditionnel $H(n+1) \to H(n)$ peut être sub-vraie, sans que la généralisation universelle soit sub-vraie.

Mis sous la forme: $H(3), \forall n(H(n+1) \to H(n) \therefore H(1)$ l'argument soritique est sub-valide, mais dans ce cas, on doit conclure que sa seconde prémisse est sub-fausse. Sous cette forme, l'argument est valide mais pas correct.

4 Discussion: le débat Keefe-Hyde

La solution subvaluationniste est-elle meilleure que la solution supervaluationniste? Et est-elle robuste?

• Keefe formule précisément cette objection au subvaluationnisme, à savoir que si l'on conjoint les prémisses, on doit modifier le diagnostic du paradoxe. Soit l'énoncé:

$$(H(3) \wedge (H(3) \rightarrow H(2)) \wedge (H(2) \rightarrow H(1))) \rightarrow H(1)$$

Cette fois, d'après ce que nous avons établi en 4), l'énoncé est sub-valide, car il est classiquement valide. On a donc:

$$\models_{SbV} (H(3) \wedge (H(3) \rightarrow H(2)) \wedge (H(2) \rightarrow H(1))) \rightarrow H(1)$$

mÍme si

$$H(3), H(3) \rightarrow H(2), H(2) \rightarrow H(1) \not\models_{SbV} H(1)$$

- Keefe en conclut la chose suivante:

> This unappealing lack of uniformity in locating the blame results in denying most intuitions associated with the sorites argument: it is not valid, at least in some forms, one of the premises is not true, in other forms, and different ways of stating what is apparently the same argument are actually stating crucially different arguments. (Keefe 2000: 200)

- La réponse de Hyde (2008: 102) est que la même situation vaut en principe de l'approche supervaluationniste défendue par Keefe.

On a:

(1) $H(3), H(3) \rightarrow H(2), H(2) \rightarrow H(1) \models_{SV} H(1)$

Si chaque prémisse est super-vraie, alors la conclusion aussi. De mÍme:

(2) $H(3), \forall n(H(n+1) \rightarrow H(n) \models_{SV} H(1)$

Dans les deux cas, l'approche par supervaluation déclare l'argument valide. L'approche supervaluationniste déclare que la seconde prémisse de (2) est super-fausse (cf. cours précédents). Par parité, cependant, elle devrait déclarer qu'au moins une des prémisses conditionnelles de (1) est super-fausse.

Mais le supervaluationnisme ne veut pas dire cela: dans le modèle ci-dessus, $\forall n(H(n+1) \rightarrow H(n)$ est super-faux, mÍme si aucun des conditionnels $H(n+1) \rightarrow H(n)$ n'est super-faux. Dans ce cas, le supervaluationniste doit dire que les conditionnels en question ne sont pas tous super-vrais.

On trouve là la dualité recherchée entre subvaluationnisme et supervaluationnisme:

- toute instance $H(n+1) \rightarrow H(n)$ peut être sub-vraie sans que $\forall n(H(n+1) \rightarrow H(n))$ soit sub-vraie.

- mais pareillement, $\forall n(H(n+1) \rightarrow H(n))$ peut Ítre super-faux sans qu'aucune instance $H(n+1) \rightarrow H(n)$ soit super-fausse.

Cela renvoie à l'une des objections de Williamson à la notion de super-vérité, qui s'applique en fait à super-vérité et à sub-vérité: ni la super-vérité ni la sub-vérité ne sont *décitationnelles* (en particulier on perd: "tout x est P" est vrai ssi "P" est vrai de tout x)

• En réalité, cependant, la dualité entre supervaluationisme et subvaluationisme empÍche de considérer l'argument de Keefe comme entièrement convaincant.