Logique modale et intensionnalité

Paul Égré

Institut Jean-Nicod, CNRS
http://paulegre.free.fr

Ateliers JSM, Bordeaux, 28 mars 2006

Références utiles

- R. Montague 1968, ‘Pragmatics’
- M. Aloni 2005, ‘Individual Concepts in Modal Predicate Logic’, Journal of Philosophical Logic.
- P. Blackburn 1999, M. de Rijke et Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge.
- M. Fitting & R. Mendelsohn (1998), *First-Order Modal Logic*, Kluwer.
- G.E. Hughes & M.J. Cresswell (1996), *A new Introduction to Modal Logic*, Routledge.

Parcours prévu

1. Logique modale propositionnelle
2. Logique modale quantifiée

Syntaxe, Sémantique et Pragmatique

Montague 1968, sur la division de Morris 1938 :

- Syntax : ‘relations between linguistic expressions’
- Semantics : ‘relations between expressions and the objects to which they refer’
- Pragmatics : ‘relations among expressions, the objects to which they refer, and the users or contexts of use of the expressions’

L'indexicalité

- Montague 1968 : ‘pragmatics concern itself with what C. S. Peirce had in the last century called *indexical expressions*, that is words and sentences of which the reference cannot be determined without knowledge of the context of use; examples are the words ‘I’ and ‘here’, as well as sentences involving tenses’

Sémantique et Pragmatique

‘It seemed to me desirable that pragmatics should at least initially follow the lead of semantics, which is primarily concerned with the notion of truth (in a model, or under an interpretation), and hence concern itself also with truth -but with respect not only to an interpretation but also to a context of use’.

Logique modale et pragmatique

- Un *langage pragmatique* : un langage du premier ordre avec égalité et opérateurs modaux
- *indices*, points de référence et *mondes possibles*
- 'For instance, if the only indexical feature of *L* were the occurrence of tense operators, then the points of reference might naturally be chosen as moments of time, regarded as possible moments of utterance'

exemples :
'il pleut', vrai ou faux selon le contexte
'j'aime lire' : vrai ou faux selon le locuteur

Interprétation, Extension et Intension

Sémantique : interprétation $< W, D, I >$

- W = ensemble des mondes
- D = domaine d'individus D
- I = fonction d'interprétation, de domaine $L \times W$

Extension = dénotation relativement à un monde
Intension = fonction des mondes dans les extensions
Exemple : constante d'individu c = 'le président Américain'
(Montague 1968, 99) : 'we should specify for each moment i the person regarded as the American President at i'
$I(c)(w)$= Richard Nixon, $I(c)(w')$=George Bush

Logiques modales et Pragmatique

‘When we come to consider special disciplines comprehended by pragmatics - disciplines such as tense logic, modal logic, the logic of personal pronouns...’
$\Rightarrow$ logique temporelle, logique modale standard, logique déontique

Logique épistémique et pragmatique

Montague 1968 n'inclut pas explicitement la logique épistémique parmi les spécialisations de la pragmatique. Cependant, les verbes d'attitude comme 'croire' ou 'savoir' introduisent de l'indexicalité:

- 'il pleut' vs 'Pierre croit qu'il pleut'
- monde réel vs mondes de croyance

Objet de cet atelier : logique modale et applications.

Langage

Alphabet: ensemble dénombrable d'atomes *p*, *q*, *r*,...

1. Atomes: tout atome est une formule
2. Si ϕ est une formule, $\neg\phi$ est une formule
3. Si ϕ et ψ sont des formules, alors $(\phi \wedge \psi)$ est une formule.
4. Si ϕ est une formule, alors $\Box\phi$ est une formule.
5. Rien d'autre n'est une formule.

Abbréviations: $\Diamond\phi$:= $\neg\Box\neg\phi$
$(\phi \vee \psi) := \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
$(\phi \rightarrow \psi) := \neg(\phi \wedge \neg\psi)$

Sémantique de Leibniz-Carnap

Leibniz: une formule est nécessairement vraie ssi elle est vraie dans tous les mondes possibles.

Un modèle $M = \langle W, V \rangle$ est un couple constitué d'un ensemble W (de mondes possibles), et d'une fonction d'interprétation V qui associe à chaque atome du langage un sous-ensemble de mondes possibles. La satisfaction des énoncés est relative à chaque monde possible.

(i) $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$
(ii) $M, w \models \neg\phi$ ssi $M, w \not\models \phi$
(iii) $M, w \models (\phi \wedge \psi)$ ssi $M, w \models \phi$ et $M, w \models \psi$
(iv) $M, w \models \Box\phi$ ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$

Sémantique de Leibniz-Carnap

Leibniz: une formule est nécessairement vraie ssi elle est vraie dans tous les mondes possibles.

Un modèle $M = \langle W, V \rangle$ est un couple constitué d'un ensemble W (de mondes possibles), et d'une fonction d'interprétation V qui associe à chaque atome du langage un sous-ensemble de mondes possibles. La satisfaction des énoncés est relative à chaque monde possible.

(i) $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$
(ii) $M, w \models \neg\phi$ ssi $M, w \not\models \phi$
(iii) $M, w \models (\phi \wedge \psi)$ ssi $M, w \models \phi$ et $M, w \models \psi$
(iv) $M, w \models \Box\phi$ ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$

Sémantique de Leibniz-Carnap

Leibniz: une formule est nécessairement vraie ssi elle est vraie dans tous les mondes possibles.

Un modèle $M = \langle W, V \rangle$ est un couple constitué d'un ensemble W (de mondes possibles), et d'une fonction d'interprétation V qui associe à chaque atome du langage un sous-ensemble de mondes possibles. La satisfaction des énoncés est relative à chaque monde possible.

(i) $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$

(ii) $M, w \models \neg\phi$ ssi $M, w \not\models \phi$

(iii) $M, w \models (\phi \wedge \psi)$ ssi $M, w \models \phi$ et $M, w \models \psi$

(iv) $M, w \models \Box\phi$ ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$

Validité

Définition: on dit que ϕ est valide, et on note $\models \phi$, ssi pour tout modèle M et tout monde w du modèle, $M, w \models \phi$.

- ex: $\models \Box\phi \rightarrow \phi$
  Preuve: soit $M = \langle W, V \rangle$ et $w \in W$ tels que $M, w \models \Box\phi$. Alors pout tout $v \in W$, $M, v \models \phi$, donc en particulier $M, w \models \phi$. Donc $M, w \models \Box\phi \rightarrow \phi$.
- ex: $\not\models \phi \rightarrow \Box\phi$
  Preuve: soit $W = \{w, v\}$ tel que: $w(p) = 1, v(p) = 0$. On a: $M, w \models p$. Mais $M, w \not\models \Box p$, puisque $M, v \models \neg p$. Donc $M, w \not\models p \rightarrow \Box p$.
- Comparer: "S'il est nécessaire qu'il pleuve, alors il pleut" "S'il pleut, alors il est nécessaire qu'il pleuve".

Validité

Définition: on dit que ϕ est valide, et on note $\models \phi$, ssi pour tout modèle M et tout monde w du modèle, $M, w \models \phi$.

- ex: $\models \Box\phi \rightarrow \phi$
  Preuve: soit $M = \langle W, V \rangle$ et $w \in W$ tels que $M, w \models \Box\phi$. Alors pout tout $v \in W$, $M, v \models \phi$, donc en particulier $M, w \models \phi$. Donc $M, w \models \Box\phi \rightarrow \phi$.
- ex: $\not\models \phi \rightarrow \Box\phi$
  Preuve: soit $W = \{w, v\}$ tel que: $w(p) = 1, v(p) = 0$. On a: $M, w \models p$. Mais $M, w \not\models \Box p$, puisque $M, v \models \neg p$. Donc $M, w \not\models p \rightarrow \Box p$.
- Comparer: "S'il est nécessaire qu'il pleuve, alors il pleut" "S'il pleut, alors il est nécessaire qu'il pleuve".

Validité

Définition: on dit que ϕ est valide, et on note $\models \phi$, ssi pour tout modèle M et tout monde w du modèle, $M, w \models \phi$.

- ex: $\models \Box\phi \rightarrow \phi$
  Preuve: soit $M = \langle W, V\rangle$ et $w \in W$ tels que $M, w \models \Box\phi$.
  Alors pout tout $v \in W$, $M, v \models \phi$, donc en particulier $M, w \models \phi$. Donc $M, w \models \Box\phi \rightarrow \phi$.
- ex: $\not\models \phi \rightarrow \Box\phi$
  Preuve: soit $W = \{w, v\}$ tel que: $w(p) = 1$, $v(p) = 0$.
  On a: $M, w \models p$. Mais $M, w \not\models \Box p$, puisque $M, v \models \neg p$.
  Donc $M, w \not\models p \rightarrow \Box p$.
- Comparer: "S'il est nécessaire qu'il pleuve, alors il pleut" "S'il pleut, alors il est nécessaire qu'il pleuve".

Validité

Définition: on dit que ϕ est valide, et on note $\models \phi$, ssi pour tout modèle M et tout monde w du modèle, $M, w \models \phi$.

- ex: $\models \Box\phi \rightarrow \phi$
  Preuve: soit $M = \langle W, V \rangle$ et $w \in W$ tels que $M, w \models \Box\phi$. Alors pout tout $v \in W$, $M, v \models \phi$, donc en particulier $M, w \models \phi$. Donc $M, w \models \Box\phi \rightarrow \phi$.
- ex: $\not\models \phi \rightarrow \Box\phi$
  Preuve: soit $W = \{w, v\}$ tel que: $w(p) = 1, v(p) = 0$. On a: $M, w \models p$. Mais $M, w \not\models \Box p$, puisque $M, v \models \neg p$. Donc $M, w \not\models p \rightarrow \Box p$.
- Comparer: "S'il est nécessaire qu'il pleuve, alors il pleut" "S'il pleut, alors il est nécessaire qu'il pleuve".

Exercice

Déterminer si les formules suivantes sont valides:

(1) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

(2) $\Box p \rightarrow \Diamond\Box p$

(3) $\Box(p \vee q) \rightarrow \Box(p \vee q)$

(4) $\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$

Lien avec la logique quantifiée

Fonction de traduction *ST*: des énoncés de la logique modale vers ceux de la logique des prédicats:

$$
\begin{aligned}
ST_x(p) &= P(x)\\
ST_x((\phi \wedge \psi)) &= (ST_x(\phi) \wedge ST_x(\psi))\\
ST_x(\neg\phi) &= \neg ST_x(\phi)\\
ST_x(\Box\phi) &= \forall x ST_x(\phi)\\
ST_x(\Diamond\phi) &= \exists x ST_x(\phi)
\end{aligned}
$$

Par exemple :

$ST_x(\Box(p \rightarrow q) \vee \Box(q \rightarrow p)) = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$

$ST_x(\Box\Diamond p)) = \forall x ST_x(\Diamond p) = \forall x \exists x P(x)$

Lien avec la logique quantifiée

Fonction de traduction ST: des énoncés de la logique modale vers ceux de la logique des prédicats:

$$
\begin{aligned}
ST_x(p) &= P(x) \\
ST_x((\phi \wedge \psi)) &= (ST_x(\phi) \wedge ST_x(\psi)) \\
ST_x(\neg\phi) &= \neg ST_x(\phi) \\
ST_x(\Box\phi) &= \forall x ST_x(\phi) \\
ST_x(\Diamond\phi) &= \exists x ST_x(\phi)
\end{aligned}
$$

Par exemple :

$ST_x(\Box(p \rightarrow q) \vee \Box(q \rightarrow p)) = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$

$ST_x(\Box\Diamond p)) = \forall x ST_x(\Diamond p) = \forall x \exists x P(x)$

Lien avec la logique quantifiée

Fonction de traduction ST: des énoncés de la logique modale vers ceux de la logique des prédicats:

$$\begin{array}{ll} ST_x(p) & = P(x) \\ ST_x((\phi \wedge \psi)) & = (ST_x(\phi) \wedge ST_x(\psi)) \\ ST_x(\neg\phi) & = \neg ST_x(\phi) \\ ST_x(\Box\phi) & = \forall x ST_x(\phi) \\ ST_x(\Diamond\phi) & = \exists x ST_x(\phi) \end{array}$$

Par exemple :

$ST_x(\Box(p \rightarrow q) \vee \Box(q \rightarrow p)) = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$

$ST_x(\Box\Diamond p)) = \forall x ST_x(\Diamond p) = \forall x \exists x P(x)$

Vérifonctionnalité

Syntaxiquement, $\Box$ et $\Diamond$ sont des opérateurs unaires, comme la négation $\neg$. Mais ce ne sont pas des opérateurs vérifonctionnels:

- Pour la négation, on a: si $w(\phi) = w(\psi)$, alors $w(\neg\phi) = w(\neg\psi)$.
- Mais on peut avoir: $w(\phi) = w(\psi)$, sans que $w(\Box\phi) = w(\Box\psi)$

ex: $W = \{w, v\}$. On pose: $V(p) = W$, $V(q) = \{w\}$.
Alors: $w(p) = w(q) = 1$. Mais $w(\Box p) = 1$, mais $w(\Box q) = 0$.

C'est en ce sens que $\Box$ et $\Diamond$ sont des opérateurs intensionnels.

Vérifonctionnalité

Syntaxiquement, $\Box$ et $\Diamond$ sont des opérateurs unaires, comme la négation $\neg$. Mais ce ne sont pas des opérateurs vérifonctionnels:

- Pour la négation, on a: si $w(\phi) = w(\psi)$, alors $w(\neg\phi) = w(\neg\psi)$.
- Mais on peut avoir: $w(\phi) = w(\psi)$, sans que $w(\Box\phi) = w(\Box\psi)$

ex: $W = \{w, v\}$. On pose: $V(p) = W$, $V(q) = \{w\}$.
Alors: $w(p) = w(q) = 1$. Mais $w(\Box p) = 1$, mais $w(\Box q) = 0$.

C'est en ce sens que $\Box$ et $\Diamond$ sont des opérateurs intensionnels.

Vérifonctionnalité

Syntaxiquement, $\Box$ et $\Diamond$ sont des opérateurs unaires, comme la négation $\neg$. Mais ce ne sont pas des opérateurs vérifonctionnels:

- Pour la négation, on a: si $w(\phi) = w(\psi)$, alors $w(\neg\phi) = w(\neg\psi)$.
- Mais on peut avoir: $w(\phi) = w(\psi)$, sans que $w(\Box\phi) = w(\Box\psi)$

ex: $W = \{w, v\}$. On pose: $V(p) = W$, $V(q) = \{w\}$.
Alors: $w(p) = w(q) = 1$. Mais $w(\Box p) = 1$, mais $w(\Box q) = 0$.

C'est en ce sens que $\Box$ et $\Diamond$ sont des opérateurs intensionnels.

Correspondance

Étant donné une structure d'interprétation $M = \langle W, V \rangle$, on note:

- $M \models ST_x(\phi)$ $[x := w]$ pour dire que M satisfait la formule $ST_x(\phi)$ lorsqu'on donne pour valeur w à la variable libre x.
- Lorsque x est liée par un quantificateur, on pose: $M \models \forall x \phi$ $[x := w]$ ssi pour tout d dans U, $M \models \phi$ $[x := d]$.

$$M, w \models \phi \text{ ssi } M \models ST_x(\phi) \ [x := w]$$

Correspondance

Étant donné une structure d'interprétation $M = \langle W, V \rangle$, on note:

- $M \models ST_x(\phi)\ [x := w]$ pour dire que M satisfait la formule $ST_x(\phi)$ lorsqu'on donne pour valeur w à la variable libre x.
- Lorsque x est liée par un quantificateur, on pose: $M \models \forall x \phi\ [x := w]$ ssi pour tout d dans U, $M \models \phi\ [x := d]$.

$$M, w \models \phi \text{ ssi } M \models ST_x(\phi)\ [x := w]$$

Correspondance

Étant donné une structure d'interprétation $M = \langle W, V \rangle$, on note:

- $M \models ST_x(\phi)\ [x := w]$ pour dire que M satisfait la formule $ST_x(\phi)$ lorsqu'on donne pour valeur w à la variable libre x.
- Lorsque x est liée par un quantificateur, on pose: $M \models \forall x \phi\ [x := w]$ ssi pour tout d dans U, $M \models \phi\ [x := d]$.

$$M, w \models \phi \text{ ssi } M \models ST_x(\phi)\ [x := w]$$

Correspondance

Étant donné une structure d'interprétation $M = \langle W, V \rangle$, on note:

- $M \models ST_x(\phi)\ [x := w]$ pour dire que M satisfait la formule $ST_x(\phi)$ lorsqu'on donne pour valeur w à la variable libre x.
- Lorsque x est liée par un quantificateur, on pose: $M \models \forall x \phi\ [x := w]$ ssi pour tout d dans U, $M \models \phi\ [x := d]$.

$$M, w \models \phi \text{ ssi } M \models ST_x(\phi)\ [x := w]$$

Exemple

- $\Box(p \vee q)$ vs $\Box p \vee \Box q$
- $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ vs $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Prenons pour W l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
$P(x) := x$ est pair, $Q(x) := x$ est impair

Comparer à : "tout entier pair est impair ou tout entier impair est pair".

Preuve du théorème

Par induction sur la complexité des formules.

On pose pour tout atome p, $V(p) = V(P)$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$ ssi $w \in V(P)$ ssi $M \models P(x)\ [x := w]$ ssi $M \models ST_x(p)\ [x := w]$
- La négation et les connecteurs binaires ne posent pas de pb.
- $M, w \models \Box\phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M \models ST_x(\phi)\ [x := v]$ (par hypothèse d'induction)
  ssi $M \models \forall x ST_x(\phi)\ [x := w]$ (par définition)
  ssi $M \models ST_x(\Box\phi)\ [x := w]$

Preuve du théorème

Par induction sur la complexité des formules.

On pose pour tout atome p, $V(p) = V(P)$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$ ssi $w \in V(P)$ ssi $M \models P(x)$ $[x := w]$ ssi $M \models ST_x(p)$ $[x := w]$
- La négation et les connecteurs binaires ne posent pas de pb.
- $M, w \models \Box\phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M \models ST_x(\phi)$ $[x := v]$ (par hypothèse d'induction)
  ssi $M \models \forall x ST_x(\phi)$ $[x := w]$ (par définition)
  ssi $M \models ST_x(\Box\phi)$ $[x := w]$

Preuve du théorème

Par induction sur la complexité des formules.

On pose pour tout atome p, $V(p) = V(P)$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$ ssi $w \in V(P)$ ssi $M \models P(x)\ [x := w]$ ssi $M \models ST_x(p)\ [x := w]$
- La négation et les connecteurs binaires ne posent pas de pb.
- $M, w \models \Box\phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M \models ST_x(\phi)\ [x := v]$ (par hypothèse d'induction)
  ssi $M \models \forall x ST_x(\phi)\ [x := w]$ (par définition)
  ssi $M \models ST_x(\Box\phi)\ [x := w]$

Preuve du théorème

Par induction sur la complexité des formules.

On pose pour tout atome p, $V(p) = V(P)$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$ ssi $w \in V(P)$ ssi $M \models P(x)$ $[x := w]$ ssi $M \models ST_x(p)$ $[x := w]$
- La négation et les connecteurs binaires ne posent pas de pb.
- $M, w \models \Box\phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M \models ST_x(\phi)$ $[x := v]$ (par hypothèse d'induction)
  ssi $M \models \forall x ST_x(\phi)$ $[x := w]$ (par définition)
  ssi $M \models ST_x(\Box\phi)$ $[x := w]$

Preuve du théorème

Par induction sur la complexité des formules.

On pose pour tout atome p, $V(p) = V(P)$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$ ssi $w \in V(P)$ ssi $M \models P(x)\ [x := w]$ ssi $M \models ST_x(p)\ [x := w]$
- La négation et les connecteurs binaires ne posent pas de pb.
- $M, w \models \Box\phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M \models ST_x(\phi)\ [x := v]$ (par hypothèse d'induction)
  ssi $M \models \forall x ST_x(\phi)\ [x := w]$ (par définition)
  ssi $M \models ST_x(\Box\phi)\ [x := w]$

Preuve du théorème

Par induction sur la complexité des formules.

On pose pour tout atome p, $V(p) = V(P)$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$ ssi $w \in V(P)$ ssi $M \models P(x)\ [x := w]$ ssi $M \models ST_x(p)\ [x := w]$
- La négation et les connecteurs binaires ne posent pas de pb.
- $M, w \models \Box\phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M \models ST_x(\phi)\ [x := v]$ (par hypothèse d'induction)
  ssi $M \models \forall x ST_x(\phi)\ [x := w]$ (par définition)
  ssi $M \models ST_x(\Box\phi)\ [x := w]$

Preuve du théorème

Par induction sur la complexité des formules.

On pose pour tout atome p, $V(p) = V(P)$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$ ssi $w \in V(P)$ ssi $M \models P(x)\ [x := w]$ ssi $M \models ST_x(p)\ [x := w]$
- La négation et les connecteurs binaires ne posent pas de pb.
- $M, w \models \Box\phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M \models ST_x(\phi)\ [x := v]$ (par hypothèse d'induction)
  ssi $M \models \forall x ST_x(\phi)\ [x := w]$ (par définition)
  ssi $M \models ST_x(\Box\phi)\ [x := w]$

Preuve du théorème

Par induction sur la complexité des formules.

On pose pour tout atome p, $V(p) = V(P)$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$ ssi $w \in V(P)$ ssi $M \models P(x)\ [x := w]$ ssi $M \models ST_x(p)\ [x := w]$
- La négation et les connecteurs binaires ne posent pas de pb.
- $M, w \models \Box\phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M, v \models \phi$
  ssi pour tout $v \in W$, $M \models ST_x(\phi)\ [x := v]$ (par hypothèse d'induction)
  ssi $M \models \forall x ST_x(\phi)\ [x := w]$ (par définition)
  ssi $M \models ST_x(\Box\phi)\ [x := w]$

Le carré aristotélicien des oppositions

Un opérateur modal peut donc être vu comme un quantificateur, et un modèle $\langle W, I \rangle$ de logique modale peut aussi bien être considéré comme un modèle pour une formule de la logique quantifiée.

$\Box p$	$\Box\neg p$
$\forall x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$
$\Diamond p$	$\Diamond\neg p$
$\exists x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$

Sémantique de Kripke

On enrichit les modèles à l'aide de relations d'accessibilité. Un modèle de Kripke est un triplet $\langle W, R, V \rangle$ avec R une relation binaire sur $W \times W$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$
- $M, w \models \neg\phi$ ssi $M, w \not\models \phi$
- $M, w \models (\phi \wedge \psi)$ ssi $M, w \models \phi$ et $M, w \models \psi$
- $M, w \models \Box\phi$ ssi pour tout w' tel que wRw', $M, w' \models \phi$
- $M, w \models \Diamond\phi$ ssi il existe w' tel que wRw' et $M, w' \models \phi$.

Sémantique de Kripke

On enrichit les modèles à l'aide de relations d'accessibilité. Un modèle de Kripke est un triplet $\langle W, R, V \rangle$ avec R une relation binaire sur $W \times W$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$
- $M, w \models \neg\phi$ ssi $M, w \not\models \phi$
- $M, w \models (\phi \wedge \psi)$ ssi $M, w \models \phi$ et $M, w \models \psi$
- $M, w \models \Box\phi$ ssi pour tout w' tel que wRw', $M, w' \models \phi$
- $M, w \models \Diamond\phi$ ssi il existe w' tel que wRw' et $M, w' \models \phi$.

Sémantique de Kripke

On enrichit les modèles à l'aide de relations d'accessibilité. Un modèle de Kripke est un triplet $\langle W, R, V\rangle$ avec R une relation binaire sur $W \times W$.

- $M, w \models p$ ssi $w \in V(p)$
- $M, w \models \neg\phi$ ssi $M, w \not\models \phi$
- $M, w \models (\phi \wedge \psi)$ ssi $M, w \models \phi$ et $M, w \models \psi$
- $M, w \models \Box\phi$ ssi pour tout w' tel que wRw', $M, w' \models \phi$
- $M, w \models \Diamond\phi$ ssi il existe w' tel que wRw' et $M, w' \models \phi$.

Quantification restreinte

La sémantique de Kripke, comparée à celle de Carnap, traite les opérateurs modaux comme des quantificateurs restreints.

Comparer:

Chacun est venu	$\forall x V(x)$
Chaque homme est venu	$\forall x (H(x) \rightarrow V(x))$
Quelqu'un est venu	$\exists x V(x)$
Un homme est venu	$\exists x (H(x) \wedge V(x))$

Validité

Définition: on appelle $\langle W, R\rangle$ un cadre
Une formule est valide ssi pour tout cadre et tout modèle de Kripke basé sur ce cadre, elle est vraie en tout monde du modèle.

ex: $\models \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$
Preuve: supposons $M, w \models \Box(\phi \to \psi)$ et $M, w \models \Box\phi$. Alors, pout tout w' tel que wRw', $M, w' \models \phi$ et $M, w' \models \phi \to \psi$. Donc $M, w' \models \psi$. Ie $M, w \models \Box\psi$.

Validité

Définition: on appelle $\langle W, R \rangle$ un cadre
Une formule est valide ssi pour tout cadre et tout modèle de Kripke basé sur ce cadre, elle est vraie en tout monde du modèle.

ex: $\models \Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$
Preuve: supposons $M, w \models \Box(\phi \rightarrow \psi)$ et $M, w \models \Box\phi$. Alors, pout tout w' tel que wRw', $M, w' \models \phi$ et $M, w' \models \phi \rightarrow \psi$. Donc $M, w' \models \psi$. Ie $M, w \models \Box\psi$.

Validité

Définition: on appelle $\langle W, R\rangle$ un cadre
Une formule est valide ssi pour tout cadre et tout modèle de Kripke basé sur ce cadre, elle est vraie en tout monde du modèle.

ex: $\models \Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$
Preuve: supposons $M, w \models \Box(\phi \rightarrow \psi)$ et $M, w \models \Box\phi$. Alors, pout tout w' tel que wRw', $M, w' \models \phi$ et $M, w' \models \phi \rightarrow \psi$. Donc $M, w' \models \psi$. Ie $M, w \models \Box\psi$.

Invalidité

ex: $\not\models \Box\phi \rightarrow \phi$
Preuve: soit $W = \{w, v\}$ et $R = \{(w, v)\}$. $V(p) = \{v\}$.

$$\begin{array}{ccc} w & \longrightarrow & v \\ & & p \end{array}$$

- La sémantique de Kripke est plus générale que celle de Carnap: en ajoutant des modèles, on perd des validités.
- Comparer:
  (1) Si chacun est venu, alors Pierre est venu: $\surd$
  (2) Si chaque linguiste est venu, alors Pierre est venu: $\times$

Invalidité

ex: $\not\models \Box\phi \rightarrow \phi$

Preuve: soit $W = \{w, v\}$ et $R = \{(w, v)\}$. $V(p) = \{v\}$.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r] & v \\ & p \end{tikzcd}$$

- La sémantique de Kripke est plus générale que celle de Carnap: en ajoutant des modèles, on perd des validités.
- Comparer:
  (1) Si chacun est venu, alors Pierre est venu: $\surd$
  (2) Si chaque linguiste est venu, alors Pierre est venu: $\times$

Invalidité

ex: $\not\models \Box\phi \rightarrow \phi$
Preuve: soit $W = \{w, v\}$ et $R = \{(w, v)\}$. $V(p) = \{v\}$.

$$\begin{array}{ccc} w & \longrightarrow & v \\ & & p \end{array}$$

- La sémantique de Kripke est plus générale que celle de Carnap: en ajoutant des modèles, on perd des validités.
- Comparer:
  (1) Si chacun est venu, alors Pierre est venu: $\surd$
  (2) Si chaque linguiste est venu, alors Pierre est venu: $\times$

Exercice

(i) Montrer que les formules suivantes ne sont pas valides:

(1) $\Box p \rightarrow \Diamond p$
(2) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

(ii) Comparer les formules à:

(3) S'il est nécessaire qu'il pleuve, alors il est possible qu'il pleuve
(4) S'il est nécessaire qu'il pleuve, alors il est nécessaire qu'il soit nécessaire qu'il pleuve.

Exercice

(i) Montrer que les formules suivantes ne sont pas valides:

(1) $\Box p \rightarrow \Diamond p$
(2) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

(ii) Comparer les formules à:

(3) S'il est nécessaire qu'il pleuve, alors il est possible qu'il pleuve
(4) S'il est nécessaire qu'il pleuve, alors il est nécessaire qu'il soit nécessaire qu'il pleuve.

Variété des modalités

(1) Modalités aléthiques: *il est nécessaire que*, *il est possible que*
W= ensemble des mondes possibles
R= accessibilité métaphysique

(2) Modalités épistémiques: *Pierre est certain que*, *Pierre n'exclut pas que*
W= mondes épistémiques possibles
R= incertitude épistémique

(3) Modalités temporelles: *il sera toujours le cas que*, *il sera parfois le cas que*
W= instants du temps
R= succession temporelle

Contraintes sur R

La logique sous-jacente à chacune de ces expressions modales n'est pas nécessairement la même: on peut notamment faire varier les contraintes sur R:
exemples:

- R est réflexive: $\forall w(wRw)$
- R est symétrique: $\forall x \forall y(xRy \rightarrow yRx)$
- R est transitive: $\forall x \forall y \forall z(xRy \land yRz \rightarrow xRz)$

Quelques résultats de correspondence

$\Box\phi \to \phi$ est valide dans un cadre $\langle W, R\rangle$ ssi R est réflexive.

Preuve: $(\Leftarrow)$: supposons R réflexive. Soit M et w tels que $M, w \models \Box\phi$. Alors pour tout w' tel que wRw', $M, w' \models \phi$, et par réflexivité, $M, w \models \phi$.

$(\Rightarrow)$: supposons R non-réflexive. Ie il existe w tel que $\neg wRw$. Dans ce cas, soit $V(p) = W - \{w\}$. Clairement, $M, w \models \Box p$, mais $M, w \not\models p$.

Quelques résultats de correspondence

$\Box\phi \rightarrow \phi$ est valide dans un cadre $\langle W, R \rangle$ ssi R est réflexive.

Preuve: ($\Leftarrow$): supposons R réflexive. Soit M et w tels que $M, w \models \Box\phi$. Alors pour tout w' tel que wRw', $M, w' \models \phi$, et par réflexivité, $M, w \models \phi$.

($\Rightarrow$): supposons R non-réflexive. Ie il existe w tel que $\neg wRw$. Dans ce cas, soit $V(p) = W - \{w\}$. Clairement, $M, w \models \Box p$, mais $M, w \not\models p$.

Quelques résultats de correspondence

$\Box\phi \rightarrow \phi$ est valide dans un cadre $\langle W, R\rangle$ ssi R est réflexive.

Preuve: ($\Leftarrow$): supposons R réflexive. Soit M et w tels que $M, w \models \Box\phi$. Alors pour tout w' tel que wRw', $M, w' \models \phi$, et par réflexivité, $M, w \models \phi$.

($\Rightarrow$): supposons R non-réflexive. Ie il existe w tel que $\neg wRw$. Dans ce cas, soit $V(p) = W - \{w\}$. Clairement, $M, w \models \Box p$, mais $M, w \not\models p$.

Exercices

1. Montrer de la même façon que $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ est valide dans un cadre ssi R est transitive.
2. Montrer que $p \rightarrow \Box\Diamond p$ est valide ssi R est symétrique.
3. Montrer que $\Box p \rightarrow \Diamond p$ est valide dans un cadre ssi R est sérielle, ie ssi $\forall x \exists y xRy$.
4. Montrer que $\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$ est valide dans un cadre ssi R est euclidienne, ie ssi $xRy \wedge xRz \rightarrow yRz$

Résultats de correspondence

T	$\Box p \rightarrow p$	R est réflexive
4	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$	R est transitive
5	$\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$	R est euclidienne
D	$\Box p \rightarrow \Diamond p$	R est sérielle

Applications : logique épistémique

$\Box p$ représente: “je sais que p”.
On décrit canoniquement la connaissance par un système qui satisfait:

- 4: introspection positive
- 5: introspection négative
- T: véridicité
- D: cohérence

Exemple: logique multi-modale

Un modèle multi-agent: $\langle W, R_1, R_2, V\rangle$.

Situation: on donne à 1 et à 2 un nombre entier positif. Les nombres sont nécessairement consécutifs.

On représente la structure d'information par des couples $(n, n+1)$. On note: p_n: "1 a le nombre n", et "q_n 2 a le nombre n".

1) Montrer que : dans la situation $(3, 4)$, on a: $\Diamond_1 \Diamond_2 p_5$.

2) On définit un opérateur $C_{1,2}\phi$ pour dire que ϕ est connaissance commune entre 1 et 2: ie p, $K_1 p$, $K_2 p$, $K_1 K_1 p$, $K_2 K_1 p$, ... Montrer que relativement à $(2, 3)$, il n'est pas connaissance commune que les agents ont un nombre inférieur à 100. (!)

Logique temporelle

Un modèle linéaire du temps. Structure : $\langle W, <, V \rangle$.

On considère deux modalités: F et P

- $M, w \models Fp$ ssi il existe w' tel que $w > w'$ et $M, w' \models p$
- $M, w \models Pp$ ssi il existe w' tel que $w' < w$ et $M, w' \models p$

Par définition: $Gp := \neg F \neg p$
$Hp := \neg P \neg p$

Liens avec le langage naturel

Approximations (cf. Blackburn, *Tense, Temporal Reference and Tense Logic*).

p	Pierre gagne au loto
Fp	Pierre gagnera au loto
Pp	Pierre a gagné au loto
PPp	(?) Pierre eut gagné au loto
FPp	Pierre aura gagné au loto
PF	Pierre gagnerait au loto

Propriétés de la logique temporelle

Exercice: Montrer que

- $\not\models Fp \rightarrow p$
- $\models Gp \rightarrow Fp$
- $\not\models p \rightarrow GFp$
- $\models Gp \rightarrow GGp$

Exercice

On considère les trois cadres: $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ et $(\mathbb{R}, <)$. Dans lesquels de ces cadres la formule suivante est-elle valide (cf. Blackburn & al. 1999):

$(p \wedge Hp) \rightarrow FHp$?

Réponse: dans $\mathbb{Z}$ seulement (NB. noter la correction d'une erreur sur $\mathbb{R}$ lors de l'exposé).

Limites de pouvoir expressif

La logique modale est-elle aussi expressive que la logique du premier-ordre ?

Peut-on contraire une relation d'accessibilité à satisfaire: $\forall x \neg Rxx$? ex: "Aucun instant n'est antérieur à lui-même" ?
Réponse: non

Morphisme borné

Etant donné deux modèles $\langle W, R, V\rangle$ et $\langle W', R', V'\rangle$, f est un morphisme borné ssi:

1. $w \models p$ ssi $f(w) \models p$
2. si wRv, alors $f(w)R'f(v)$
3. si $f(w)Rv'$, alors il existe v tel que wRv et $v' = f(v)$.

ex: les entiers naturels avec $<$ vs le cadre à un seul monde, tel que xRx. On pose: $f(n) = x$ pour tout n. Vérifier que f est un morphisme borné.

Invariance par morphisme borné surjectif

Surjectivité: tout élément de F' est l'image d'un élément de F

Proposition: si f est un morphisme borné surjectif de M vers M', alors pout toute formule et tout w, $M, w \models \phi$ ssi $M', f(w) \models \phi$.

Preuve: par induction. Si $M, w \models \Diamond\phi$, alors il existe v tel que wRv et $M, v \models \phi$. Par induction, $M', f(v) \models \phi$, et par morphisme, $f(w)R'f(v)$, ie $M', f(w) \models \Diamond\phi$. Idem pour la réciproque.
Preuve

Indéfinissabilité

La notion de morphisme borné surjectif peut être définie pour les cadres:

Proposition: S'il existe un morphisme surjectif de F vers F', alors si $F \models \phi$, alors $F' \models \phi$.

Preuve: supposons que $F \models \phi$ mais $(F', V'), w' \not\models \phi$ pour une valuation V. On définit sur F la valuation: $V(p_i) := \{w \in W; f(w) \in V'(p_i)\}$. Alors f est un morphisme surjectif borné entre les modèles. Par surjectivité, il existe w tel que $f(w) = w'$.

Application

Proposition: $\forall x \neg Rxx$ n'est pas définissable. Soit f le morphisme surjectif de $F = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ sur $F' = \{\{w\}, R\}$, tel que wRw. Clairement, $F \models \forall x \neg x < x$. Mais on n'a pas $F' \models \forall x \neg xRx$. Donc cette propriété n'est pas définissable modalement, sinon elle serait préservée.

Bilan

La logique modale propositionnelle n'a pas tout le pouvoir expressif de la logique du premier ordre (bien qu'elle puisse aussi définir des conditions sur les cadres qui ne sont pas définissables au premier-ordre).

La logique modale du premier-ordre

La logique modale propositionnelle est une extension de la logique propositionnelle par l'ajout des opérateurs modaux.

On peut de la même façon définir la logique modale du premier-ordre en ajoutant au langage de la logique du premier-ordre des modalités.

Langage

Alphabet: un ensemble dénombrable de variables d'individus x, y, z, ...
Ensemble dénombrable de symboles de prédicats: P, Q, R

- Formules atomiques: $R(x_1, ..., x_n)$.
- Si ϕ est une formule, $\neg\phi$ est une formule
- Si ϕ et ψ sont des formules, $(\phi \wedge \psi)$ est une formule
- Si ϕ est une formule $\exists x\phi$ et $\forall x\phi$ sont des formules
- Si ϕ est une formule, $\Box\phi$ et $\Diamond\phi$ sont des formules.
- Rien d'autre n'est une formule.

Exemples

$\exists x \Box P(x)$

$\Box \exists x P(x)$

$\forall x \Box \exists y xRy$

$\forall x \Box \exists y \Diamond xRy$

....

La distinction *de re-de dicto*

(1) Nécessairement quelqu'un gagnera à la loterie
(2) Il y a quelqu'un qui, nécessairement, gagnera à la loterie

(3) Je sais que quelqu'un gagnera à la loterie
(4) Il y a quelqu'un dont je sais qu'il gagnera à la loterie

La distinction *de re-de dicto*

(1) Nécessairement quelqu'un gagnera à la loterie
(2) Il y a quelqu'un qui, nécessairement, gagnera à la loterie

(3) Je sais que quelqu'un gagnera à la loterie
(4) Il y a quelqu'un dont je sais qu'il gagnera à la loterie

Distinctions de portée

En logique du premier-ordre, on distingue:

(1) $\forall x \exists y xRy$

(2) $\exists y \forall x xRy$

(3) Tout le monde aime quelqu'un

(4) Il y a quelqu'un que tout le monde aime

Portée des opérateurs modaux

$\Box\exists x P(x)$: dans tout monde possible, il y a un P

$\exists x \Box P(x)$: il y a un x qui, dans tout monde possible, est P

Modalité de dicto: $\Box$ prend portée large sur $\exists$

Modalité de re: $\Box$ a portée étroite sur $\exists$

Sémantique

Logique du premier-ordre: rappel

Etant donné un langage L, on appelle L-structure (ou modèle) un couple $M = \langle U, I \rangle$ constitué d'un univers d'interprétation (domaine d'individus) U et d'une fonction d'interprétation I.
Pour R une relation à n arguments, $I(R) \subseteq U^n$.
Une fonction d'assignation g: assigne à chaque variable un individu du domaine.
$g[d/x]$: l'assignation comme g qui assigne à x l'individu d

- $M, g \models R(x_1, ..., x_n)$ ssi $(g(x_1), ..., g(x_n)) \in I(R)$
- $M, g \models \neg\phi$ ssi $M, g \not\models \phi$
- $M, g \models (\phi \wedge \psi)$ ssi $M, g \models \phi$ et $M, g \models \psi$.
- $M, g \models \exists x\phi$ ssi il existe $d \in U$ tel que $M, w, g[d/x] \models \phi$.
- $M, g \models \forall x\phi$ ssi pour tout $d \in U$, $M, g[d/x] \models \phi$.

Sémantique pour la logique modale du premier-ordre

- La logique modale du premier-ordre amène à introduire plusieurs domaines d'individus, autant que de mondes. Le cas le plus simple est celui où les mondes ont le même domaine d'individus.
- Un modèle de LMPO : $M = \langle W, R, D, I \rangle$, avec R une relation d'accessibilité entre mondes de W, et D un domaine d'individus, et I une fonction d'interprétation qui associe à chaque monde w et à chaque symbole P une extension $I_w(P)$.

Les clauses de satisfaction sont les mêmes qu'au premier-ordre, sauf qu'on a en plus un paramètre de monde, et:

- $M, w, g \models \Box\phi$ ssi pour tout w' tel que wRw', $M, w', g \models \phi$

Validité: ϕ est valide ssi ϕ est vrai en tout monde de tout modèle pour toute assignation.

Les clauses de satisfaction sont les mêmes qu'au premier-ordre, sauf qu'on a en plus un paramètre de monde, et:

- $M, w, g \models \Box\phi$ ssi pour tout w' tel que wRw', $M, w', g \models \phi$

Validité: ϕ est valide ssi ϕ est vrai en tout monde de tout modèle pour toute assignation.

Exemple

A-t-on: $\models \forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$?

Réponse: non
soit $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, et $D = \{a, b\}$.
On suppose: $w_1 R w_2$ et $w_1 R w_3$
$I_{w_2}(P) = \{a\}$ et $I_{w_3}(P) = \{b\}$.
On considère une valuation arbitraire g
On a: $M, w, g \models \forall x \Diamond P(x)$
Mais on n'a pas: $M, w, g \models \Diamond \forall x P(x)$

Exemple

A-t-on: $\models \forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$?

Réponse: non
soit $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, et $D = \{a, b\}$.
On suppose: $w_1 R w_2$ et $w_1 R w_3$
$I_{w_2}(P) = \{a\}$ et $I_{w_3}(P) = \{b\}$.
On considère une valuation arbitraire g
On a: $M, w, g \models \forall x \Diamond P(x)$
Mais on n'a pas: $M, w, g \models \Diamond \forall x P(x)$

Exemple (suite)

Montrer que:
$\models \Diamond \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Diamond P(x)$.

Sémantique à domaines variables

Un modèle= $M = \langle W, R, D, I\rangle$ où D est une fonction qui assigne à chaque monde un domaine D_w. On pose: $U = \bigcup_{w \in W} D_w$.

Une assignation assigne à chaque variable un élément de U, et à chaque symbole de relation une relation sur U.

$M, w, g \models R(x_1, ..., x_n)$ ssi $(g(x_1), ..., g(x_n)) \in I_w(R)$.
$M, w, g \models \forall x \phi$ ssi pour tout élément d de D_w, $M, w, g[d/x] \models \phi$

Formules de Barcan

(BF-$\forall$) $\forall x \Box \phi \rightarrow \Box \forall x \phi$
(BF-$\Diamond$) $\Diamond \exists x \phi \rightarrow \exists x \Diamond \phi$

Etablir la validité des formules de Barcan dans la sémantique à domaine constant.

Formules de Barcan converses

(BFC-∀) $\Box \forall x \phi \rightarrow \forall x \Box \phi$
(BFC-∃) $\exists x \Diamond \phi \rightarrow \Diamond \exists x \phi$

Domaine variable et formule de Barcan

$D_w = \{a\}$, $D_v = \{a, b\}$
$I_w(P) = \emptyset$, et $I_v(P) = \{b\}$.
wRv

Montrer que : $\Diamond\exists x P(x) \rightarrow \exists x \Diamond P(x)$ n'est pas valide.

Preuve: soit $g(x) = b$
$M, v, g \models P(x)$
$M, v, g \models \exists x P(x)$
$M, w, g \models \Diamond\exists x P(x)$
Mais $M, w, g \not\models \exists x \Diamond P(x)$, car a n'est pas P en v.

Converse

$\exists x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \exists x P(x)$

Contre-modèle:

$$\begin{array}{lll} w & a, b & \\ \downarrow & & \\ v & a & P(b) \end{array}$$

Relativement à w, b est possiblement P, mais dans v, aucun individu de D_v n'est P.

Domaines croissants

Un modèle est monotone (à domaines croissants) ssi pour tout w, v si wRv, alors $D_w \subseteq D_v$.

- Montrer que $\exists x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \exists x P(x)$ est valide sur tous les modèles croissants.
- Si tout modèle basé sur un cadre satisfait **CB**, alors les domaines sont monotones.

Application au langage naturel

Quine (1956)
(1) Marie sait que quelqu'un est un espion
$\exists x \wedge \Box S(x)$
$\Box \exists x S(x)$

Exercice

Dans la sémantique à domaine constant, montrer:
$\models \exists x \Box P(x) \rightarrow \Box \exists x P(x)$.

Montrer que la réciproque est fausse.

Conclusion

Dans cette brève introduction nous avons découvert:

- La logique modale propositionnelle: moins expressive que la logique du premier-ordre, mais potentiellement plus économe (quantification implicite vs explicite)
- Logique modale quantifiée: avantage relatif à combiner la quantification implicite et la quantification explicite, plutôt que d'utiliser une logique du premier-ordre avec plusieurs sortes de variables.